

APLICAÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS PARA REDUÇÃO DOS PREJUÍZOS AGRÍCOLAS DECORRENTES DE DÉFICIT HÍDRICO

Márcia Maria Rios Ribeiro

Departamento de Engenharia Civil - UFP

Raul Dorfman

Instituto de Pesquisas Hidráulicas - UFRGS

RESUMO

Discute-se a situação de déficit hídrico em área irrigada que provoca redução na produção agrícola e causa prejuízos monetários para os irrigantes. Estes, por sua vez, são motivados a cooperarem entre si na busca da minimização deste prejuízo. Se a cooperação, a qual implica na redefinição das cotas de águas estabelecidas pelo gestor do manancial, for capaz de reduzir o prejuízo agrícola, a questão que se apresenta é a de como deve ser alocada esta redução entre os irrigantes. Com base na Teoria dos Jogos Cooperativos, o estudo desenvolve as chamadas funções características e usa o valor Shapley como método para alocar a redução do prejuízo agrícola entre os participantes. Três exemplos hipotéticos são analisados onde aplicam-se três funções de produção de água, duas específicas e uma de caráter genérico.

INTRODUÇÃO

A distribuição de água em sistemas de irrigação exige o conhecimento das relações entre fatores biológicos, físicos, sociais, políticos e econômicos. A situação, por si só, complexa, se torna mais agravada em regiões irrigadas nas quais, eventualmente, a disponibilidade de água não é compatível com os requerimentos de demandas. Como a produtividade agrícola é dependente da disponibilidade de água, um quadro de escassez hídrica provoca decréscimo na produção agrícola e ocasiona prejuízos monetários para os irrigantes. Encontrar as

decisões mais adequadas a serem tomadas nestas situações tem sido amplo tema de discussões e estudos.

Como existem muitas variáveis envolvidas no processo da irrigação, a tomada de decisão quanto às liberações a serem feitas do manancial abastecedor é mais complexa do que para situações como a de liberações para abastecimento urbano. No caso da irrigação, vários são os recursos envolvidos (fertilizantes, pesticidas, máquinas, mão de obra, qualidade do solo e da água) além do tipo de cultura, estágio de crescimento da mesma, competição pela água disponível, preço de mercado das culturas, eficiência do sistema de irrigação. É importante decidir, não apenas sobre a quantidade de água a ser aplicada, mas também sobre o momento de aplicá-la, pois as incertezas das variáveis hidrológicas envolvidas aumentam a complexidade do processo de tomada de decisão. Neste contexto, as técnicas de análise sistêmica, aliadas aos modelos água-rendimento, têm sido propostas como ferramentas de auxílio a tomada de decisões.

Neste artigo considera-se a situação em que a água liberada de um manancial (por exemplo, um reservatório) responsável pelo abastecimento de uma área de irrigação é insuficiente, em determinado período, para atendimento integral das demandas agrícolas. Tal déficit hídrico provoca redução na produção das culturas que, conseqüentemente, induz a um prejuízo em termos monetários. São consideradas três sub-áreas de cultivo. De posse da quantidade de água total a ser liberada do manancial

(uma informação já disponível no problema), o gestor do reservatório indica a parcela destinada a cada uma das sub-áreas. Os irrigantes, por sua vez, são motivados a cooperarem entre si na busca de uma redefinição das cotas de água se tal cooperação promover uma redução do prejuízo causado pela restrição hídrica. Sendo a cooperação capaz de reduzir o prejuízo, a questão que se apresenta é como deve ser alocado este prejuízo entre as sub-áreas. Para análise do problema é proposta abordagem usando a Teoria dos Jogos Cooperativos. Os conceitos da Teoria são usados em duas etapas: i) no estabelecimento do esquema de cooperação entre os irrigantes, matematicamente expresso pelas chamadas funções características ou cooperativas e ii) na alocação do valor do prejuízo obtido pela cooperação entre os participantes; nesta etapa é usado o método do valor Shapley. O problema é ilustrado através de exemplos hipotéticos utilizando três funções de produção não datadas. Duas funções são específicas, uma para a cultura do feijão no Brasil e outra para a cana de açúcar no Hawai. A terceira função é genérica e neste caso trabalha-se com três cultivos distintos.

LIBERAÇÃO DE ÁGUA PARA IRRIGAÇÃO

As técnicas mais empregadas nos estudos de sistemas de irrigação têm sido a programação linear, programação dinâmica, simulação ou combinação delas. Nas duas primeiras busca-se otimizar uma função objetivo sujeita a restrições como o balanço hídrico no reservatório abastecedor da área e o balanço hídrico do solo. Observa-se, portanto, que apesar do desenvolvimento das técnicas de análise multiobjetivo, um procedimento comum nos estudos de áreas irrigadas é o de considerar uma única função objetivo que exprima matematicamente o interesse que se tem no sistema.

A função objetivo pode ser definida em termos de maximização dos benefícios líquidos (Bras e Cordova, 1981; Paudyal e Gupta, 1990); maximização da produção (Minhas et al., 1974; Darlane e Hughes, 1991); minimização do déficit da produção relativa (Vedula e Mujumdar, 1992); maximização da área irrigada (Vedula e Rogers, 1981); maximização dos valores protéicos dos cultivos (Singh et al., 1987).

Comentários sobre as vantagens da simulação sobre as abordagens de otimização são encontrados em Steiner e Keller (1992). Os autores argumentam que a simulação maneja mais apropriadamente complexos sistemas de irrigação com grande número de estratégias de decisão. O uso da simulação na análise de sistemas de irrigação também é discutido em Howell (1983).

Quanto a liberação de água para irrigação são também bastante conhecidos os trabalhos apresentados, individualmente ou em grupo, por Dudley. Estes trabalhos discutem a alocação de água nos níveis intrasazonal e/ou intersazonal (Dudley et al., 1971; Dudley, 1972; Dudley e Burt, 1973); a tomada de decisão no caso de múltiplas culturas (Dudley et al., 1976); um modelo sofisticado de simulação do balanço hídrico do solo e do crescimento do cultivo (Dudley, 1988).

O presente estudo aborda a questão da liberação de água para irrigação em épocas de escassez hídrica. A situação de déficit hídrico na irrigação tem sido abordada de diversas formas na literatura. Alguns aspectos que têm sido sugeridos ou analisados incluem: a priorização da água para usuários estabelecidos há mais tempo na bacia (Glantz, 1982); a minimização dos custos de irrigação (Rees e Hamlin, 1983); a importância dos registros históricos de secas e seus efeitos nas culturas (Raman et al., 1992); a decisão de deixar, temporariamente ou definitivamente, certa área sem irrigação (Rees, 1987); o estabelecimento das liberações com base em regras pré-determinadas que definem "pesos" para as sub-áreas associados com as facilidades de

acesso à área, com o valor relativo do cultivo, com o nível de insumos usados na irrigação, com o grau de sensibilidade do cultivo ao estresse hídrico (Steiner e Keller, 1992).

Muitos dos trabalhos apresentados na área de análise de sistemas de irrigação, além de considerarem apenas uma função objetivo, consideram a existência de um único tomador de decisão controlando as liberações do manancial e as decisões de gerenciamento da água no nível das sub-áreas. Apesar desta consideração, é sabido que a maioria das áreas irrigadas têm, de fato, mais de um tomador de decisão: o gestor do manancial e os irrigantes das sub-áreas. Há casos, inclusive, onde existem vários decisores não subordinados a um supervisor geral e possuindo objetivos conflitantes. Neste estudo, admite-se que o gestor do reservatório define as liberações para cada sub-área. É permitido, entretanto, que os irrigantes negociem entre si sobre as liberações pré-estabelecidas pelo decisor central.

FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE ÁGUA

A relação entre a produção da cultura (Y) e o uso da água (X) é conhecida como função de produção ou modelos água-rendimento. X pode ser representado pela água aplicada artificialmente; pelo suprimento total de água no solo (chuva efetiva + água aplicada artificialmente + água disponível no solo); ou pelo uso consuntivo da água, estimado pela evapotranspiração real. A maioria dos modelos água-rendimento propostos na literatura reconhece que é a evapotranspiração relativa (relação entre evapotranspiração real e a potencial) que melhor descreve os efeitos do estresse de umidade de solo na produção real do cultivo. Outros índices são também usados, como o déficit de evapotranspiração relativa; a transpiração relativa; o déficit de transpiração relativa ou o déficit de umidade do solo.

Uma função de produção típica pode ser dividida em duas zonas (English, 1990): a primeira zona corresponde ao ramo

ascendente da curva até alcançar o seu ponto máximo; a partir daí começa a segunda zona (com excesso de irrigação). Níveis altos de aplicação de irrigação geram perdas e o sistema de irrigação se torna menos eficiente. Este declínio em eficiência é associado com a variabilidade da aplicação da água, com as características da cultura e do solo. Após o ponto de produção máxima na função de produção, a curva tende a decrescer como consequência da redução de aeração na zona das raízes e de doenças associadas com a excessiva umidade do solo.

A magnitude da redução da produção, para muitos pesquisadores, não é simplesmente uma função da evapotranspiração, mas depende da severidade do estresse hídrico ao qual é submetida a cultura e do estágio fenológico no qual ocorre este estresse. As funções de produção datadas consideram os efeitos do estresse hídrico na cultura nos seus diferentes períodos de crescimento e são classificadas em duas categorias (Bras e Cordova, 1981): as que consideram que os efeitos do estresse, ocorridos em diferentes períodos de crescimento da cultura são aditivos e aquelas que consideram que tais efeitos são multiplicativos. Em Rao et al. (1988) estão apresentadas diversas funções de produção datadas. Estudos brasileiros de funções datadas são encontrados em Parfitt (1991) e Fernandes (1991).

Nas funções de produção não datadas, o ciclo vegetativo é considerado como um todo. Os efeitos do estresse hídrico na cultura nos seus diferentes estádios não são considerados. Sem o detalhamento do que acontece em cada fase de crescimento da cultura, as funções não datadas parecem ser limitadas. Estas funções, no entanto, por sua menor exigência de dados e conseqüente simplicidade, são de extrema utilidade para várias regiões irrigadas. Exemplos de funções não datadas podem ser encontradas em Hogg et al. (1969), Stewart e Hagan (1973), Doorenbos e Kassam (1980), English e Nuss (1982), Dorfman (1985). Um exemplo brasileiro é mostrado em Frizzzone (1986).

Este trabalho é desenvolvido utilizando funções de produção não datadas, de modo a facilitar a exposição do método proposto e seu tratamento matemático. As equações e os resultados derivados podem ser estendidos às funções datadas, que são melhoramentos das funções não datadas pela introdução de diferentes parâmetros para cada estágio fenológico da cultura.

A TEORIA DOS JOGOS

Em recursos hídricos os conceitos derivados da Teoria dos Jogos têm sido aplicados tradicionalmente aos problemas de alocação de custos de projetos com múltiplos usuários (Loehman et al., 1979; Young et al., 1982; Heaney e Dickinson, 1982; Driessen e Tijs, 1985; Lejano e Davos, 1995). No Brasil, Martinez et al. (1991) aplicaram métodos derivados da Teoria dos Jogos para alocar custos das obras da bacia do rio Doce.

Há estudos que discutem a alocação de custos envolvidos em projetos de redução de danos ambientais. Neste sentido, por exemplo, analisam a redução da poluição de um corpo hídrico (Kilgour et al., 1988) e os custos de minimização dos impactos causados pela chuva ácida (Okada e Mikami, 1992). Os exemplos mostram que a cooperação na busca da redução do dano ambiental proporciona redução nos custos totais que, em uma etapa posterior, são alocados entre os participantes.

A literatura apresenta, também, alguns exemplos de aplicação da Teoria como técnica de análise de conflito. Tais exemplos discutem a operação de um reservatório com dois usuários possuindo objetivos conflitantes (Fronza et al., 1977); o conflito pelo uso da água entre usuários a jusante e usuários a montante de um lago (Okada et al., 1985); a resolução de disputas pelos recursos hídricos no nível internacional (Fraser e Hipel, 1984); o processo de fiscalização no cumprimento de regulamentações ambientais nos Estados Unidos e Canadá (Kilgour et al., 1992).

Os jogadores, as funções características e a solução do jogo

Na linguagem da Teoria dos Jogos, um jogo pode ser composto por dois participantes, $n = 2$, ou mais de dois, $n \geq 3$ (Owen, 1982). Os jogos com dois participantes podem ter soma zero ou soma diferente de zero. No primeiro caso, os jogadores têm interesses opostos indicando que o que um ganha é então perdido pelo outro (a soma do jogo é zero). Não existe, portanto, razão para a negociação. No segundo caso os jogadores não possuem interesses totalmente opostos. Eles podem cooperar entre si com o objetivo de encontrar, no conjunto dos resultados do jogo, uma situação de equilíbrio satisfatória para ambos.

As idéias do jogo de dois participantes podem ser estendidas para o caso de n participantes. O jogo é dito não cooperativo quando, no mínimo, dois dos n jogadores não estão dispostos a cooperar. Havendo cooperação entre os jogadores surge um novo conceito: o da formação de coalizões. Qualquer conjunto N de participantes (incluindo o próprio N e todos os subconjuntos) são chamados de coalizões. A formação de várias coalizões é possível e os membros de cada uma destas coalizões devem encontrar algum tipo de equilíbrio ou estabilidade que justifique a formação da coalizão. Seja $N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de n jogadores envolvidos em um jogo. O jogo de n participantes pode ser identificado por suas funções características (ou cooperativas) com valores reais definidas nos subconjuntos do conjunto N . $v(S)$ é a quantidade de utilidade que os membros de um subconjunto (ou coalizão) S podem obter do jogo, independente das ações dos demais jogadores pertencentes a N . Supondo que S e T são duas coalizões excludentes de N , para que a coalizão seja justificável em um jogo de valor v é necessário que a condição seguinte seja satisfeita:

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) \quad S \cap T = \emptyset \quad S, T \subset N$$

Depois de encontrados valores ótimos para o jogo, a etapa seguinte é fazer a alocação destes valores entre os jogadores. A solução imparcial para a alocação deve obedecer às seguintes inequações:

1. O valor a ser alocado para o jogador i , ϕ_i , não deve ser superior ao valor $v(i)$, valor da melhor alternativa que o atende individualmente:

$$\phi_i \leq v(i) \text{ para todo } i \in N$$

2. O valor a ser alocado para o subconjunto de jogadores S não deve ser superior ao valor $v(S)$, valor da melhor alternativa que atende S isoladamente:

$$\sum_i \phi_i \leq v(S) \text{ para todo } i \in S, S \subset N$$

3. A soma dos valores alocados aos jogadores deve ser igual ao valor $v(N)$, valor da alternativa de cooperação global:

$$\sum_i \phi_i = v(N) \text{ para todo } i \in N$$

O valor Shapley

Todas as soluções que satisfazem as inequações acima constituem o centro (cerne, core) do jogo. Qualquer solução dentro do cerne é estável. Há casos em que o centro do jogo pode não existir (centro vazio). Outros casos apresentam várias alocações que satisfazem os critérios estabelecidos por aquelas inequações. Vários conceitos têm sido apresentados na literatura para encontrar as soluções do jogo. Entre estes podem ser citados (Loehman et al., 1979; Heaney e Dickinson, 1982; Young et al., 1982; Owen, 1982; Lejano e Davos, 1995): centro mínimo, centro mínimo fraco, valor Shapley, nucleolus, nucleolus fraco, nucleolus normalizado, extensões multilíneas, índice Banzhaf-Coleman. O valor Shapley, um dos mais antigos e populares conceitos é adotado neste estudo.

Shapley (1953) supôs que alguns elementos do conjunto N formavam uma coalizão S . Considerando uma determinada coalizão S já formada, o valor incremental da participação de um determinado jogador i é calculado por $v(S) - v(S - i)$. Assume-se que a ordem de entrada de cada jogador na coalizão é desconhecida e que há possibilidade de todas as combinações de coalizões ocorrerem.

Analisando o caso de um conjunto com 3 participantes, isto é, $N = \{1, 2, 3\}$, seis combinações são possíveis de ocorrer. Para o caso do jogador $i = 1$, por exemplo, as combinações e os valores incrementais correspondentes são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Combinações e valores incrementais para $i = 1$.

Combinações	Valores incrementais
(123)	$v(1)$
(132)	$v(1)$
(213)	$v(1,2) - v(2)$
(312)	$v(1,3) - v(3)$
(231)	$v(1,2,3) - v(2,3)$
(321)	$v(1,2,3) - v(3,2)$

Supondo a mesma prioridade de entrada na coalizão já formada para os jogadores i do conjunto N , o valor a ser alocado a cada um, chamado então de valor Shapley, pode ser calculado através da média dos seus valores incrementais ou diretamente pela Equação 1. No caso de ser imposta prioridade para um determinado jogador, serão consideradas apenas as ordenações onde tal participante aparece em primeira posição.

$$\phi_i = \sum_{S \subset N, i \in S} \left\{ \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \right\} [v(S) - v(S-i)] \quad (1)$$

onde n é o número de jogadores no conjunto N , s é o número de jogadores na coalizão S .

O PROBLEMA DA REDUÇÃO DO PREJUÍZO NA IRRIGAÇÃO

Supõe-se a existência de uma determinada área de irrigação com três sub-áreas de tamanhos diferentes onde se podem cultivar a mesma cultura ou culturas distintas. Assume-se que um manancial abastece a área irrigada e que em certo período a água disponível para este abastecimento não supre integralmente as necessidades das culturas, o que ocasiona redução no rendimento esperado de cada uma delas, isto é, configura-se uma situação de prejuízo na produção agrícola. O gestor do manancial, através de algum acordo em vigor ou das técnicas de análise sistêmica discutidas anteriormente, estabelece a parcela de água destinada para cada sub-área irrigada. A questão que se apresenta é como os responsáveis por cada sub-área devem manejar esta parcela a fim de que o prejuízo global e de cada um seja minimizado. O controle da água no nível da sub-área é, portanto, estabelecido por cada um dos irrigantes, os quais são estimulados a cooperarem entre si na redução do prejuízo causado pela restrição hídrica, se a cooperação proporcionar redução do valor do prejuízo global e de cada sub-área. Concretizando-se a redução de tais valores, analisa-se a alocação destes através do valor Shapley.

O estudo admite as seguintes hipóteses: uma função de produção não datada é disponível para a área estudada; outros insumos como fertilizantes, pesticidas são disponíveis em níveis que não limitam a produção das culturas; toda água necessária à planta é proveniente do manancial, ou seja, as quantidades de chuva efetiva e água armazenada no solo são desprezadas; os gestores de cada sub-área cultivada estão dispostos a cooperarem entre si na busca da minimização dos prejuízos se a cooperação oferecer vantagens econômicas para cada um. Considerando estas hipóteses, a metodologia a ser adotada obedece às seguintes etapas: i) definição do critério de

repartição da escassez hídrica pelo gestor; ii) cálculo dos prejuízos decorrentes da limitação de água segundo o critério de distribuição do gestor; iii) definição das funções características individuais $v(i)$, setoriais $v(S)$ e global $v(N)$ com base em função de produção adotada; iv) cálculo dos valores de prejuízos com base nas funções características; v) alocação final do prejuízo para cada jogador.

Definição da função característica

Para definição da função característica, isto é, da função de prejuízo, é necessário expressar matematicamente o benefício líquido total da área plantada. O benefício é então estabelecido como a diferença entre o benefício advindo da área irrigada (renda proveniente da comercialização das culturas) e os custos de mão-de-obra, insumos, máquinas, captação, transporte e destinação da água, e custo da água:

$$BL_i = \sum_i (B_i - C_i)$$

onde BL_i é o benefício líquido total, em \$; B_i é o benefício do cultivo i em \$, definido por $B_i = Y_i \cdot A_i \cdot P_i$; C_i são os custos envolvidos na produção do cultivo i , em \$; Y_i é o rendimento atual do cultivo i , em kg ha^{-1} , podendo ser expresso por vários modelos água-rendimento, conforme visto anteriormente; A_i é a área do cultivo i , em ha e P_i é o preço comercializado do cultivo i , em $\text{\$ kg}^{-1}$.

Definem-se dois benefícios líquidos: o esperado (se não houvesse a escassez hídrica) e o obtido (com a ocorrência da escassez). O benefício líquido total esperado (BLE_i) em \$ é definido por:

$$BLE_i = \sum_i (Ye_i \cdot A_i \cdot P_i - C_i)$$

onde Ye_i é o rendimento esperado do cultivo i , considerado igual ao rendimento máximo Y_m , em Kg/ha e A_i , P_i e C_i já definidos anteriormente.

O benefício líquido total obtido (BL_o_i) em \$ é definido por:

$$BLo_i = \sum_i (Yo_i \cdot A_i \cdot P_i - C_i)$$

onde Yo_i é o rendimento obtido do cultivo i , em Kg/ha e A_i , P_i e C_i já definidos anteriormente.

O prejuízo total (ou perdas) de produção agrícola conseqüente da escassez de água em S é:

$$P_{j_i} = \sum_i (BLe_i - BLo_i)$$

Considerando os custos C_i fixos, tem-se:

$$P_{j_i} = \sum_i (Ye_i \cdot A_i \cdot P_i - Yo_i \cdot A_i \cdot P_i)$$

com todas as variáveis já definidas.

Função característica com base em função de produção quadrática do tipo $Y = a + bx + cx^2$

Várias são as funções que apresentam a forma $Y = a + bx + cx^2$, com x sendo a lâmina de água aplicada durante todo o ciclo vegetativo. Entre estas estão a função de Stewart e Hagan (1973) e a de English e Nuss (1982). Um exemplo brasileiro de função com estas características é mostrado em Frizzone (1986). O autor estabeleceu uma função de rendimento do feijão (Equação 2 e Figura 1) tendo a água como fator variável. O experimento foi conduzido na região de Ilha Solteira (São Paulo) e os parâmetros da função obtidos via regressão.

$$Y = -553,849 + 9,0964 \cdot W - 0,00853 \cdot W^2 \quad (2)$$

onde Y é o rendimento real em Kg ha⁻¹ e W a lâmina total de água aplicada em mm.

O rendimento máximo de grãos de feijão (Y_m) é obtido quando $W = 530$ mm, isto é, $Y_m = 1871$ Kg ha⁻¹. Acima de 530 mm, entra-se na faixa de excesso de água e redução de rendimento.

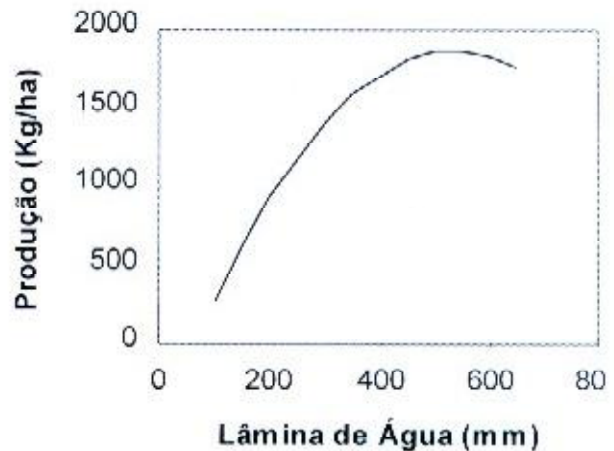


Figura 1. Função de produção para o feijão na região de São Paulo (Frizzone, 1986).

Considerando-se situação de déficit hídrico e três sub-áreas cultivadas, sete funções características podem ser definidas: três individuais (P_{j_1} , P_{j_2} , P_{j_3}) e quatro funções cooperativas ($P_{j_{123}}$, $P_{j_{12}}$, $P_{j_{13}}$, $P_{j_{23}}$). A função de prejuízo individual pode ser expressa por:

$$P_{j_i} = A_i \cdot P_i [Ye_i - (a + bx_i + cx_i^2)] \quad (3)$$

onde P_{j_i} é o prejuízo para a sub-área ou jogador i em \$; x_i é a lâmina de água em mm destinada a i , definida por $x_i = p_i \cdot W$; p_i é a cota de W destinada a cada i e $\sum_i p_i = 1$; $a = -553,849$; $b = 9,0964$; $c = -0,00853$ e as demais variáveis já definidas anteriormente.

A função característica de prejuízo ou cooperativa $P_{j_{123}}$ é encontrada analiticamente através do método dos Multiplicadores de Lagrange (Equação 4). Ela representa o mínimo prejuízo de produção agrícola obtido pela aliança (1,2,3), isto é, aliança formada entre o jogador 1, o 2 e o 3. O problema é matematicamente descrito pelas seguintes função objetivo e restrições:

$$\text{Min } \sum_i P_{j_i}$$

sujeito a

$$i = 1; 2; 3$$

$$x_i \leq 530 \text{ mm}$$

$$\sum x_i = W_{123}$$

$$P_{j123} = A_1 \cdot P_1 [Ye_1 - (a + bx_1^* + cx_1^{*2})] + A_2 \cdot P_2 [Ye_2 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] + A_3 \cdot P_3 [Ye_3 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (4)$$

onde P_{j123} é a função de prejuízo conjunto (1, 2, 3); x_1^* , x_2^* e x_3^* as lâminas ótimas de água, respectivamente para os jogadores 1, 2 e 3;

$$x_1^* = (\lambda_{123} + N_1 b) / -2N_1 c;$$

$$x_2^* = (\lambda_{123} + N_2 b) / -2N_2 c;$$

$$x_3^* = (\lambda_{123} + N_3 b) / -2N_3 c;$$

$$\lambda_{123} = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 (-2W_{123} \cdot c - 3b) / (N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot N_3 + N_2 \cdot N_3);$$

$$W_{123} = x_1 + x_2 + x_3;$$

$$N_1 = A_1 \cdot P_1;$$

$$N_2 = A_2 \cdot P_2;$$

$$N_3 = A_3 \cdot P_3.$$

Para a situação das sub-coalizões, isto é, cada um dos dois jogadores (1,2); (1,3) e (2,3) cooperando entre si, a formulação é semelhante. Cada função (Equações 5, 6, e 7) representa o mínimo prejuízo de produção agrícola encontrado quando da formação das sub-alianças.

$$\text{Min } \sum_i P_{ji}$$

sujeito a

$$i = 1;2 \text{ ou } i = 1;3 \text{ ou } i = 2;3$$

$$x_i < 530 \text{ mm}$$

$$\sum x_i = W_{12} \text{ ou } \sum x_i = W_{13} \text{ ou } \sum x_i = W_{23}$$

$$P_{j12} = A_1 \cdot P_1 [Ye_1 - (a + b x_1^* + cx_1^{*2})] + A_2 \cdot P_2 [Ye_2 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] \quad (5)$$

onde P_{j12} é a função de prejuízo conjunto (1, 2); x_1^* e x_2^* as lâminas ótimas de água para os jogadores 1 e 2;

$$x_1^* = (\lambda_{12} + N_1 b) / -2N_1 c;$$

$$x_2^* = (\lambda_{12} + N_2 b) / -2N_2 c;$$

$$\lambda_{12} = N_1 \cdot N_2 (-2W_{12} \cdot c - 2b) / (N_1 + N_2);$$

$$W_{12} = x_1 + x_2;$$

$$N_1 \text{ e } N_2 \text{ definidos anteriormente.}$$

$$P_{j13} = A_1 \cdot P_1 [Ye_1 - (a + b x_1^* + cx_1^{*2})] + A_3 \cdot P_3 [Ye_3 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (6)$$

onde P_{j13} é a função de prejuízo conjunto (1, 3); x_1^* e x_3^* as lâminas ótimas de água para os jogadores 1 e 3;

$$x_1^* = (\lambda_{13} + N_1 b) / -2N_1 c;$$

$$x_3^* = (\lambda_{13} + N_3 b) / -2N_3 c;$$

$$\lambda_{13} = N_1 \cdot N_3 (-2W_{13} \cdot c - 2b) / (N_1 + N_3);$$

$$W_{13} = x_1 + x_3;$$

$$N_1 \text{ e } N_3 \text{ definidos anteriormente.}$$

$$P_{j23} = A_2 \cdot P_2 [Ye_2 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] + A_3 \cdot P_3 [Ye_3 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (7)$$

onde P_{j23} é a função de prejuízo conjunto (2, 3); x_2^* e x_3^* são as lâminas ótimas de água para os jogadores 2 e 3;

$$x_2^* = (\lambda_{23} + N_2 b) / -2N_2 c;$$

$$x_3^* = (\lambda_{23} + N_3 b) / -2N_3 c;$$

$$\lambda_{23} = N_2 \cdot N_3 (-2W_{23} \cdot c - 2b) / (N_2 + N_3);$$

$$W_{23} = x_2 + x_3;$$

$$N_2 \text{ e } N_3 \text{ definidos anteriormente.}$$

Função característica com base em função de produção quadrática do tipo $Y = Y_m (a + bx + cx^2)$

Várias são as funções que apresentam a forma $Y = Y_m (a + bx + cx^2)$. Um exemplo, com $x = \text{ETR/ETP}$ (evapotranspiração real / evapotranspiração potencial), é a função de Hogg et al. (1969) ajustada aos dados de Waipio, Oahu (Hawaii). A função foi desenvolvida para cana de açúcar e seus parâmetros a , b e c foram estabelecidos via regressão. O rendimento máximo obtido com a função de Hogg et al. (1969), Equação 8, tem valor de $Y_m = 152,9 \text{ ton/acre}$, o qual se dá para a condição de $x = 1$. A função tem validade no intervalo $0,70 \leq x \leq 1$. Valores de x acima de 1, segundo os próprios autores, não contribuem para o rendimento da cultura. Hogg et al. (1969) chamam a atenção para o uso da função apenas em regiões com condições semelhantes àsquelas da área experimental.

$$Y = Y_m (-1,7429 + 5,4858\text{EPF} - 2,7429\text{EPF}^2) \quad (8)$$

onde Y é o rendimento real em ton/acre; Y_m , rendimento máximo em ton/acre; EPF, fator efetivo de evaporação, definido por $EPF = [ER + (ANI \cdot RAM)]/ETP = ETR/ETP$; ER, precipitação efetiva; ANI, quantidade de ciclos de irrigação; RAM, armazenamento da água do solo; ETP, evapotranspiração potencial e ETR é a evapotranspiração real.

Supondo situação de déficit hídrico, o prejuízo na produção para cada área cultivada pode ser expresso pela Equação 9:

$$P_{ji} = Y_{e_i} \cdot A_i \cdot P_i [1 - (a + bx_i + cx_i^2)] \quad (9)$$

onde P_{ji} é o prejuízo para a sub-área ou jogador i em \$; x_i é um índice de evapotranspiração relativa de i , definido por $x_i = p_i \cdot Q$; p_i é a cota de Q destinada a cada i e $\sum_i p_i = 1$; $a = -1,7429$; $b = 5,4858$; $c = -2,7429$; e demais variáveis já definidas anteriormente.

O problema pode ser formulado de forma semelhante ao definido para a função de Frizzone (1986). As funções características são também encontradas através do Lagrange. Sendo assim:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sum_i P_{ji} \\ &\text{sujeito a} \\ &i = 1; 2; 3 \\ &0,7 \leq x_i \leq 1 \\ &\sum x_i = Q_{123} \end{aligned}$$

$$P_{j123} = Y_{e1} \cdot A_1 \cdot P_1 [1 - (a + bx_1^* + cx_1^{*2})] + Y_{e2} \cdot A_2 \cdot P_2 [1 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] + Y_{e3} \cdot A_3 \cdot P_3 [1 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (10)$$

onde P_{j123} é a função de prejuízo conjunto (1, 2, 3); x_1^* , x_2^* e x_3^* são índices ótimos ETR/ETP, respectivamente para os jogadores 1, 2 e 3;

$$\begin{aligned} x_1^* &= (\lambda_{123} + M_1 b) / -2M_1 c; \\ x_2^* &= (\lambda_{123} + M_2 b) / -2M_2 c; \\ x_3^* &= (\lambda_{123} + M_3 b) / -2M_3 c; \\ \lambda_{123} &= M_1 M_2 M_3 (Q_{123} \cdot c - 3b) / (M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3); \\ Q_{123} &= x_1 + x_2 + x_3; \\ M_1 &= Y_{e1} \cdot A_1 \cdot P_1; \\ M_2 &= Y_{e2} \cdot A_2 \cdot P_2; \\ M_3 &= Y_{e3} \cdot A_3 \cdot P_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sum_i P_{ji} \\ &\text{sujeito a} \\ &i = 1; 2 \text{ ou } i = 1; 3 \text{ ou } i = 2; 3 \\ &0,7 \leq x_i \leq 1 \\ &\sum x_i = Q_{12} \text{ ou } \sum x_i = Q_{13} \text{ ou } \sum x_i = Q_{23} \end{aligned}$$

$$P_{j12} = Y_{e1} \cdot A_1 \cdot P_1 [1 - (a + bx_1^* + cx_1^{*2})] + Y_{e2} \cdot A_2 \cdot P_2 [1 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] \quad (11)$$

onde P_{j12} é a função de prejuízo conjunto (1, 2); x_1^* e x_2^* são índices ótimos ETR/ETP para os jogadores 1 e 2;

$$\begin{aligned} x_1^* &= (\lambda_{12} + M_1 b) / -2M_1 c; \\ x_2^* &= (\lambda_{12} + M_2 b) / -2M_2 c; \\ \lambda_{12} &= M_1 M_2 (-2Q_{12} \cdot c - 2b) / (M_1 + M_2); \\ Q_{12} &= x_1 + x_2; \\ M_1 \text{ e } M_2 &\text{ definidos anteriormente.} \end{aligned}$$

$$P_{j13} = Y_{e1} \cdot A_1 \cdot P_1 [1 - (a + bx_1^* + cx_1^{*2})] + Y_{e3} \cdot A_3 \cdot P_3 [1 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (12)$$

onde P_{j13} é a função de prejuízo conjunto (1, 3);

$$\begin{aligned} &x_1^* \text{ e } x_3^* \text{ são índices ótimos ETR/ETP para os jogadores 1 e 3;} \\ x_1^* &= (\lambda_{13} + M_1 b) / -2M_1 c; \\ x_3^* &= (\lambda_{13} + M_3 b) / -2M_3 c; \\ \lambda_{13} &= M_1 M_3 (-2Q_{13} \cdot c - 2b) / (M_1 + M_3); \\ Q_{13} &= x_1 + x_3; \\ M_1 \text{ e } M_3 &\text{ definidos anteriormente.} \end{aligned}$$

$$P_{j23} = Y_{e2} \cdot A_2 \cdot P_2 [1 - (a + bx_2^* + cx_2^{*2})] + Y_{e3} \cdot A_3 \cdot P_3 [1 - (a + bx_3^* + cx_3^{*2})] \quad (13)$$

onde P_{j23} é a função de prejuízo conjunto (2, 3);

$$\begin{aligned} &\text{onde } x_2^* \text{ e } x_3^* \text{ são índices ótimos ETR/ETP para os jogadores 2 e 3;} \\ x_2^* &= (\lambda_{23} + M_2 b) / -2M_2 c; \\ x_3^* &= (\lambda_{23} + M_3 b) / -2M_3 c; \\ \lambda_{23} &= M_2 M_3 (-2Q_{23} \cdot c - 2b) / (M_2 + M_3); \\ Q_{23} &= x_2 + x_3; \\ M_2 \text{ e } M_3 &\text{ definidos anteriormente.} \end{aligned}$$

O caso da função de produção genérica

Reconhecendo a ausência de dados necessários para a determinação dos parâmetros das funções de produção, Doorenbos e Kassam (1980) formularam uma relação linear entre a diminuição do rendimento relativo (Y/Y_m) e o déficit da evapotranspiração relativa (ETR/ETP) válida para $ETR \geq 0,5ETP$. Tal relação (Equação 14) é dada por um índice de estresse hídrico (K_y) derivado empiricamente. Com base em resultados experimentais se tem K_y para todo o período vegetativo e para os distintos períodos de desenvolvimento dos cultivos.

$$Y = Y_m [1 - K_y (1 - ETR/ETP)] \quad (14)$$

onde Y é o rendimento real; Y_m é o rendimento máximo; ETR é a evapotranspiração real do cultivo; ETP é a evapotranspiração potencial do cultivo; K_y é um fator empírico de efeito do déficit sobre o rendimento.

O prejuízo causado pelo déficit hídrico para cada cultura pode ser calculado por:

$$P_{ji} = Y_{ei} A_i P_i [K_y (1 - x_i)] \quad (15)$$

onde P_{ji} é o prejuízo para a sub-área ou jogador i em \$; x_i é um índice de evapotranspiração relativa, definido por $x_i = p_i$ (ETR/ETP); p_i é a fração de (ETR/ETP) destinada a cada i e $\sum_i p_i = 1$; demais variáveis já definidas anteriormente.

Sendo a função de Doorenbos e Kassam (1980) uma função linear, não é possível a definição analítica das funções características através dos Multiplicadores de Lagrange. Propõe-se, portanto, o estudo da mesma através de Programação Linear.

Alocação do prejuízo

Para as 3 funções a serem analisadas (Frizzone, 1986; Hogg et al., 1969 e Doorenbos e Kassam, 1980) a cooperação entre os 3 jogadores na redução do prejuízo só será justificável se as inequações abaixo

forem obedecidas; tais inequações indicam que o prejuízo conjunto de cada aliança deve ser inferior ou igual à soma dos prejuízos individuais dos participantes da respectiva aliança.

$$\begin{aligned} P_{j12} &\leq P_{j1} + P_{j2}; \\ P_{j13} &\leq P_{j1} + P_{j3}; \\ P_{j23} &\leq P_{j2} + P_{j3} \text{ e} \\ P_{j123} &\leq P_{j1} + P_{j2} + P_{j3} \end{aligned}$$

Considerando o caso de $n = 3$ e que o número real $v(S)$ representa o valor do mínimo prejuízo de produção agrícola encontrado pela coalizão S , os valores de ϕ_i (valor Shapley) que indicam o prejuízo alocado para cada jogador i estão formulados, com base na Equação 1, a seguir:

$$\phi_1 = 1/3P_{j1} + 1/6[P_{j12} - P_{j2}] + 1/6[P_{j13} - P_{j3}] + 1/3[P_{j123} - P_{j23}] \quad (16)$$

$$\phi_2 = 1/3P_{j2} + 1/6[P_{j12} - P_{j1}] + 1/6[P_{j23} - P_{j3}] + 1/3[P_{j123} - P_{j13}] \quad (17)$$

$$\phi_3 = 1/3P_{j3} + 1/6[P_{j13} - P_{j1}] + 1/6[P_{j23} - P_{j2}] + 1/3[P_{j123} - P_{j12}] \quad (18)$$

com todas as variáveis já definidas.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Função de Frizzone (1986)

Considere-se uma área de irrigação de 100 ha plantada com feijão na região de validade da função. A área é subdividida em três áreas menores (A_i) gerenciadas por irrigantes distintos. Ao irrigante 1 é destinado 45 ha; ao 2, 35 ha e ao 3, 20 ha. O preço de comercialização P_i da cultura para cada sub-área i é US\$ 0,45 kg^{-1} . O máximo rendimento obtido por cada um dos irrigantes, entendidos aqui como jogadores, é $Y_m = 1871,00 \text{ kg ha}^{-1}$ quando a lâmina de água for de 530,00 mm para cada um deles. Para a área total

necessita-se, portanto, de $W_1 + W_2 + W_3 = 1590,00$ mm. No período estudado, apresenta-se situação de escassez hídrica que impossibilita o atendimento integral da lâmina necessária ao rendimento máximo. Nesta situação, a lâmina total possível de atendimento é de $W_{123} = 1272,00$ mm, o que configura uma escassez de 20%, isto é, deixam de ser atendidos 318,00 mm. Analisa-se a situação na qual a distribuição da escassez hídrica entre as sub-áreas é feita de forma igualitária, ou seja, $p_1 = p_2 = p_3$. Esta decisão implica em fornecer para cada sub-área uma lâmina de água no valor de 424,00 mm. Com base nesta decisão, o valor do rendimento real Y_i (calculado pela Equação 2) para cada jogador é 1769,53 kg ha⁻¹.

Considerando a orientação do gestor do reservatório, os prejuízos decorrentes da escassez hídrica para o jogador 1 (P_{j1}), para o jogador 2 (P_{j2}) e para o jogador 3 (P_{j3}), calculados pela Equação 3 são, respectivamente (em US\$), 2054,77; 1598,15; 913,23. Somam, portanto, um prejuízo total de $P_{j1} + P_{j2} + P_{j3} = 4566,15$.

Os tomadores de decisão de cada sub-área i , entretanto, são motivados a manejarem a lâmina total $W_{123} = 1272,00$ diferentemente da indicação do gestor do reservatório se isto proporcionar minimização do prejuízo global. Na busca desta minimização, o prejuízo conjunto obtido através da função cooperativa definida pela Equação 4 é $P_{j123} = 4080,09$ dólares encontrado com $x_1^* = 460,55$ mm; $x_2^* = 440,49$ mm e $x_3^* = 370,96$ mm. Estes são os valores que otimizam o uso da lâmina total 1272,00 para a área de irrigação como um todo. Esta situação indica que o jogador 3, o que possui a menor área plantada, cede 53,04 mm de água (424,00 - 370,96) para ser usada pelos jogadores 1 e 2. Destes 53,04 mm, 36,55 mm são repassados para o jogador 1, que possui a maior área plantada, e 16,49 mm para o jogador 2. Os jogadores 1, 2 e 3 recebem, respectivamente, 36,20%, 34,62% e 29,16% de W_{123} . Com esta distribuição de lâmina, a redução de prejuízo obtida é de US\$ 486,06 (4566,15 - 4080,09). A Figura 2 mostra

as funções de prejuízo para os jogadores 1 (P_{j1}), 2 (P_{j2}) e 3 (P_{j3}) e a função conjunta P_{j123} .

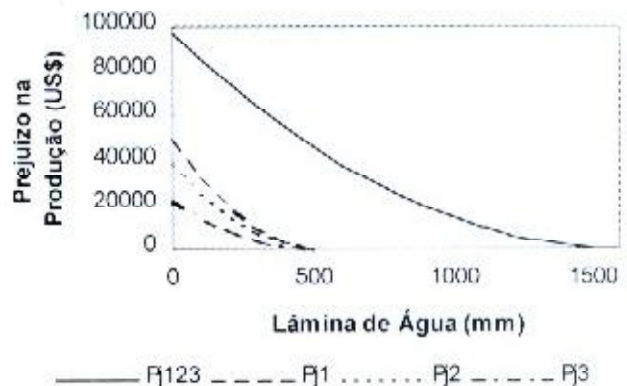


Figura 2. Funções de prejuízo individual dos jogadores 1 (P_{j1}), 2 (P_{j2}) e 3 (P_{j3}) e prejuízo conjunto (P_{j123}) com base na função de produção de Frizzone (1986).

Apesar da cooperação (1, 2, 3) apresentar prejuízo total inferior à US\$ 4566,15, o jogador 3 pode não demonstrar motivação em participar da aliança (1, 2, 3) pois a mesma define para si uma liberação hídrica de $x_3^* = 370,96$ mm, inferior ao valor de 424,00 mm. Diante deste fato, o participante 3 procura melhorar a sua situação formando, por exemplo, uma sub-aliança com o jogador 1. Para o caso da combinação 13 ($W_{13} = 848,00$ mm), aliança entre os jogadores 1 e 3, tem-se pela Equação 6, $P_{j13} = \text{US\$ } 2527,71$ com $x_1^* = 466,00$ mm e $x_3^* = 382,00$ mm. A situação provoca uma redução de US\$ 440,29 no prejuízo do rendimento conjunto das sub-áreas 1 e 3 (diferença entre $P_{j1} + P_{j3} = \text{US\$ } 2968,00$ e P_{j13}). A combinação (1,3), comparada com (1,2,3), proporciona aumento no valor da liberação hídrica de cada um dos jogadores. A Figura 3 mostra as funções de prejuízo para os jogadores 1 (P_{j1}) e 3 (P_{j3}) e a função conjunta P_{j13} .

Diante da formação da aliança (1, 3), situação que implica em deixar o participante 2 com os 424,00 mm preestabelecidos pelo gestor, o jogador 2 pode propor à 3 o estabelecimento da aliança (2, 3). Tal aliança ($W_{23} = 848,00$ mm) proporciona um prejuízo conjunto $P_{j23} = \text{US\$ } 2324,00$ calculado pela Equação 7 e oferece $x_2^* = 453,78$ e $x_3^* =$

394,22; situação que é mais vantajosa do que $P_{j_2} + P_{j_3} = 2511,38$. Nesta combinação tanto 2 como 3 obtêm valor de liberação hídrica superior ao encontrado nas alianças anteriores (1, 2, 3) e (1, 3).

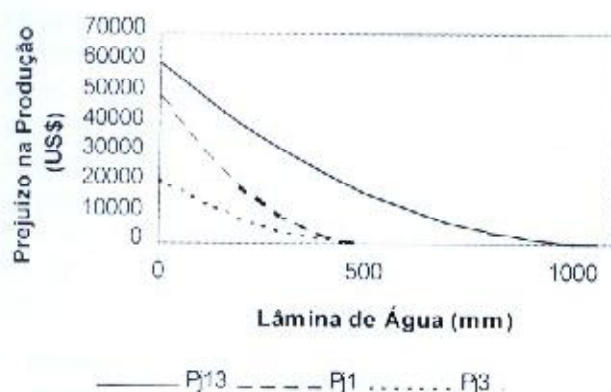


Figura 3. Funções de prejuízo individual dos jogadores 1 (P_{j_1}) e 3 (P_{j_3}) e prejuízo conjunto ($P_{j_{13}}$) com base na função de produção de Frizzone (1986).

Caso seja formada a coalizão (1, 2) os valores para x_1^* e x_2^* são respectivamente 437,62 mm e 410,38 mm. A função cooperativa (1, 2) dada pela Equação 5 indica que estas sub-áreas ($W_{12} = 848,00$ mm) trabalhando conjuntamente arcariam com um prejuízo de $P_{j_{12}} = \text{US\$ } 3595,51$. A redução de prejuízo para sub-áreas 1 e 2 é de US\$ 57,41 (diferença entre $P_{j_1} + P_{j_2} = 3652,92$ e 3595,51). A Tabela 2 resume os resultados (em dólares) encontrados sem e com a cooperação entre as áreas na busca da redução do prejuízo da produção agrícola. Figuras semelhantes à Figura 3 poderiam ser mostradas para as coalizões (1,2) e (2,3).

Tabela 2. Valores de prejuízos de produção agrícola sem e com cooperação entre os jogadores e valor da redução de prejuízo.

Sem cooperação (US\$)	Com cooperação (US\$)	Redução de prejuízo (US\$)
$P_{j_1} + P_{j_2} + P_{j_3} = 4566,15$	$P_{j_{123}} = 4080,00$	486,06
$P_{j_1} + P_{j_2} = 3652,92$	$P_{j_{12}} = 3595,51$	57,41
$P_{j_1} + P_{j_3} = 2968,00$	$P_{j_{13}} = 2527,71$	440,29
$P_{j_2} + P_{j_3} = 2511,38$	$P_{j_{23}} = 2324,00$	187,38

Da Tabela 2 observa-se que, entre as sub-coalizões, a aliança que proporciona maior redução do prejuízo é a (1, 3), constituída pelo jogador detentor da maior área (1) e pelo que possui a menor área (3). A menor redução de prejuízo ocorre com a aliança (1, 2). É vantajosa a cooperação entre os jogadores na administração da lâmina de água total (1272,00 mm) e parcial (848,00 mm), o que implica em cessão de água de um jogador para outro. Os resultados também refletem o fato de que a maior quantidade de água deve ser destinada, em qualquer coalizão, ao jogador com maior valor de área cultivada.

De posse dos valores de prejuízo decorrentes da formação da aliança global e das sub-alianças, a questão que se apresenta é a de estabelecer o prejuízo que deve ser destinado para cada sub-área. Seja ϕ_1 o valor do prejuízo destinado para o jogador 1, ϕ_2 para o jogador 2 e ϕ_3 para o jogador 3. Adotando o índice Shapley para definir a solução do jogo, tem-se como resultados (em US\$): $\phi_1 = 1872,26$; $\phi_2 = 1542,10$ e $\phi_3 = 856,00$, calculados, respectivamente, pelas Equações 16, 17 e 18. Há, portanto, uma redução de prejuízo (em US\$) de 182,51 (8,88%) para o jogador 1; 56,05 (3,50%) para o jogador 2 e de 57,23 (6,27%) para o jogador 3. O participante com maior área cultivada tem a maior redução de prejuízo.

Neste exemplo, a distribuição da lâmina é feita de forma igualitária e a única variável na questão é a área cultivada (A). Com características de mesmo cultivo (feijão) plantado nas sub-áreas com igual restrição hídrica, o rendimento máximo (Y_m), o preço de comercialização (P) e o rendimento atual (Y) são iguais para as sub-áreas enquanto que a renda atual (Y.A.P) e o prejuízo (P_j) na produção são proporcionais às áreas. Entretanto, os números ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 expressam valores de prejuízos que não são proporcionais às áreas cultivadas de cada jogador.

Função de Hogg et al. (1969)

Para exemplificar, assume-se uma área total de 200 acres plantada com cana de açúcar na região de validade da função. Esta área está subdividida em três áreas menores (A_i): 80 acres para o irrigante 1; 70 para o 2 e 50 para o 3. O rendimento máximo Y_m tem valor igual a 152,79 ton/acre para cada irrigante e o preço P_i de comercialização da cultura para cada sub-área i é US\$ 300/acre. A área é submetida a uma escassez de água que ocasiona redução na produção da cultura. O índice total de evapotranspiração relativa (ETR/ETP) para área é de $x_1 + x_2 + x_3 = 2,4$, isto é, há um déficit hídrico (em termos de evapotranspiração relativa) de 20%. Neste caso não é feita uma distribuição eqüitativa da escassez e o valor do índice x_i e o conseqüente rendimento real Y_i (ton/acre) calculado através da Equação 8 são, respectivamente, 0,75 e 126,68 ton/acre para o jogador 1; 0,80 e 136,12 ton/acre para o jogador 2 e 0,85 e 143,36 ton/acre para o jogador 3.

Os prejuízos decorrentes da escassez hídrica para os jogadores 1 (P_{j1}), 2 (P_{j2}) e 3 (P_{j3}) são, respectivamente (em US\$), 629 084,12; 352 287,10; 141 543,93, calculados pela Equação 9. As reduções de prejuízo (em US\$) obtidas com a formação das coalizões são 154 628,89 para a combinação (1,2,3); 30 196,04 para (1,2); 150 980,20 para (1,3) e 18 243,45 para (2,3). Todos os resultados indicam que ao jogador detentor da maior área cultivada, em cada aliança formada, deve corresponder o maior índice ETR/ETP. A maior redução de prejuízo entre sub-alianças é a estabelecida pela combinação (1,3).

Os cálculos através das Equações 16, 17 e 18 fornecem os valores de prejuízo alocados para cada jogador. Estes valores são: $\phi_1 = 553\,426,27$; $\phi_2 = 342\,997,61$ e $\phi_3 = 71\,862,37$. Há, portanto, uma redução de prejuízo (em US\$) de 75 657,85 (12,03%) para o jogador 1; 9289,49 (2,64%) para o jogador 2 e de 69 681,56 (49,23%) para o jogador 3. O alto valor de redução referente ao terceiro participante está relacionado com o

esquema de distribuição de água que favorece o jogador que tem a menor área irrigada.

Este exemplo envolve o mesmo cultivo (cana de açúcar) e áreas distintas; o preço (P) e o rendimento máximo (Y_m) são iguais para os jogadores. Sendo a distribuição de água não igualitária, o rendimento atual (Y), a renda atual ($Y.A.P$), o prejuízo (P) e o novo prejuízo (ϕ) não são proporcionais às áreas.

Função de Doorenbos e Kassam (1980)

Para análise da questão da minimização do prejuízo através da função de Doorenbos e Kassam, 3 cultivos distintos foram escolhidos: (1) algodão, (2) tomate e (3) milho. A Tabela 3 indica os valores do rendimento máximo Y_m , fator de déficit K_y , da área A , do preço P de comercialização para cada cultivo. Adotou-se valores de rendimentos máximos sugeridos por Doorenbos e Kassam (1980) e fator de déficit K_y correspondente a todo o ciclo fenológico de cada cultivo analisado. Segundo estes valores, percebe-se que o milho (3) é o mais sensível ao déficit hídrico, seguido do tomate (2) e do algodão (1). O exemplo com base na função de Doorenbos e Kassam (1980) é particularmente interessante por ter um caráter genérico, o que possibilita estudar o problema com culturas distintas. Nesta situação, não apenas a área cultivada é variável mas também o são o preço de comercialização do produto (P), o rendimento máximo (Y_m), o fator de sensibilidade ao déficit hídrico (K_y).

Supõe-se uma situação em que o índice total de evapotranspiração é de 2,4 (20% de escassez total) e que cada área cultivada terá o mesmo índice, ou seja, $x_1 = x_2 = x_3$. Considera-se, também, que cada jogador não poderá ter índice x inferior a 0,7. Todos os jogadores recebem mesmo valor de $x = \text{ETR/ETP}$, o qual é igual a 0,80. Os rendimentos Y_i calculados pela Equação 14 são 3320,00 ton acre⁻¹ para o irrigante 1; 35550,00 ton acre⁻¹ para o 2 e 6000,00 ton acre⁻¹ para o 3.

Tabela 3. Valores de rendimento máximo Y_{mi} , déficit K_{yi} , área A_i e preço P_i para cada sub-área i .

Jogador i (Sub-área)	Rendimento Y_{mi} (Kg/ha)	Déficit K_{yi}	Área A_i (ha)	Preço P_i (US\$/acre)
1-algodão	4000	0,85	30	0,60
2-tomate	45000	1,05	15	0,08
3-milho	6000	1,25	55	0,10

O problema, por apresentar função objetivo e restrições lineares, é analisado através de Programação Linear (PL). Sua formulação para a situação da cooperação global (1, 2, 3) e para as sub-alianças (1, 2), (1, 3) e (2, 3) é, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sum_i P_{ji} \\ &\text{sujeito a} \\ &i = 1; 2; 3 \\ &0,7 \leq x_i \leq 1 \\ &\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min } \sum_i P_{ji} \\ &\text{sujeito a} \\ &i = 1; 2 \text{ ou } i = 1; 3 \text{ ou } i = 2; 3 \\ &0,7 \leq x_i \leq 1 \\ &\sum x_i = x_1 + x_2 \text{ ou } \sum x_i = x_1 + x_3 \text{ ou } \sum x_i = x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Os prejuízos decorrentes da escassez hídrica para o jogador 1 (P_{j1}), para o jogador 2 (P_{j2}) e para o jogador 3 (P_{j3}), considerando-se distribuição igualitária do índice de evapotranspiração, são, respectivamente (em US\$), 12 240,00; 11 340,00; 8250,00, calculados pela Equação 15. Os resultados obtidos por PL indicam que a menor restrição hídrica é destinada ao jogador, em cada aliança constituída, cuja renda máxima (Y_{mi} , A_i , P_i) multiplicada pelo déficit hídrico (K_{yi}) tem o maior valor; caso do jogador 1 nas alianças (1,2,3), (1,2) e (1,3) e do jogador 2 em (2,3). A cooperação global (1,2,3) causa uma redução de prejuízo (em US\$) de 2445,01 e as sub-alianças (1,2), (1,3) e (2,3), respectivamente, de 450,00; 1995,00 e 1545,00. A maior redução de prejuízo em sub-coalizão ocorre em (1,3), combinação entre o irrigante com maior renda máxima (Y_{mi} , A_i , P_i) e o com menor renda.

Os cálculos através das Equações 16, 17 e 18 fornecem, respectivamente, os

valores de prejuízo alocados para o jogador 1, o 2 e o 3 (em US\$): $\phi_1 = 11 532,50$; $\phi_2 = 10 857,50$ e $\phi_3 = 6617,50$. Há, portanto, uma redução de prejuízo (em US\$) de 707,50 (5,78%) para o jogador 1; 482,50 (4,24%) para o jogador 2 e de 1632,50 (19,78%) para o jogador 3.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, o problema da busca da redução de prejuízo agrícola entre três sub-áreas irrigadas e submetidas a restrição hídrica é discutido. Todo o estudo é desenvolvido com base nos conceitos da Teoria dos Jogos Cooperativos onde os jogadores agem conjuntamente em busca dos seus objetivos. O trabalho pode ser resumido em três etapas essenciais. A etapa 1 está relacionada com a definição do critério de distribuição da escassez hídrica que o tomador de decisão adota no nível de manancial. Na etapa 2, os participantes do jogo procuram formar coalizões (um conceito proveniente da Teoria dos Jogos Cooperativos) para minimizar o prejuízo. Nesta etapa está a formulação das funções características ou resolução do problema, por exemplo, através de Programação Linear. Três cenários são analisados: os jogadores atuando individualmente, atuando em subgrupos e formando a grande coalizão. Na etapa 3, os benefícios advindos da formação das coalizões devem ser repartidos de forma justa entre os jogadores; procede-se, portanto, à alocação de prejuízo para cada participante através de método de alocação de recursos proveniente da Teoria dos Jogos.

O critério adotado pelo gestor do manancial para distribuir a escassez hídrica (etapa 1) é o ponto de partida para análise do problema estudado e a informação necessária para iniciar o jogo. A escolha deste critério muito interfere no arranjo final das alocações de prejuízo entre os jogadores. Diferentes critérios produzirão diferentes alocações e uma pequena mudança no critério pode ter um significativo efeito no resultado das

alocações de prejuízo. Neste artigo, apenas um critério foi adotado em cada exemplo. Para os casos baseados em Frizzone (1986) e Doorenbos e Kassam (1980) adotou-se distribuição igualitária da escassez enquanto que para o exemplo de Hogg et al. (1969) o jogador com menor área cultivada foi o menos penalizado. Outros esquemas de distribuição de escassez de água entre os participantes poderiam incluir: repartição proporcional à área plantada ou à sensibilidade do cultivo ao déficit hídrico; em função do rendimento máximo ou da renda máxima; considerando resultado da última colheita, ou seja, poder-se-ia contemplar com mais água o participante cuja última produção não foi satisfatória, etc. A definição das cotas "p" poderia, inclusive, ser discutida em uma negociação prévia entre os jogadores e o gestor. Em muitas situações reais há, entretanto, que se considerar a pressão que freqüentemente faz o participante que é politicamente mais forte sobre o gestor.

Quanto maior o número de indivíduos envolvidos em um jogo, maior será o número de coalizões a serem formadas. Este artigo mostra o exemplo de três jogadores e, conseqüentemente, sete combinações (etapa 2): (1,2,3), (1,2), (1,3), (2,3), (1), (2) e (3). Para uma situação, por exemplo, de $n = 10$ jogadores, o número de coalizões cresce demasiadamente para $2^n - 1 = 1023$. Um número alto de coalizões pode tornar o problema não factível na prática. Nestas situações, recomenda-se que os participantes se organizem em grupos. Cada grupo passa a ser considerado como um jogador. Vários critérios poderiam auxiliar no agrupamento como, localização geográfica, características do sistema de irrigação, semelhança de cultivo plantado. Obtido o valor do prejuízo alocado para cada grupo, tal número seria rateado dentro do grupo obedecendo metodologia adotada no caso global.

Aplicou-se o valor Shapley como método para alocar o prejuízo minimizado pela formação das cooperações entre os jogadores (etapa 3). O valor Shapley tem como vantagens a sua simplicidade (o método se resume em uma fórmula) e a sua já

documentada grande aplicação em diversos problemas de alocação de recursos. O método, entretanto, considera que todas as coalizões entre os jogadores são possíveis de ocorrer e igualmente prováveis. No mundo real, muitas vezes, é possível saber quais as coalizões impossíveis de ocorrer. Para efeito de análise mais detalhada dos resultados oferecidos pelo valor Shapley, é preciso adotar outros métodos de alocação para posterior comparação.

Quanto às funções de produção genéricas, elas constituem importantes instrumentos para regiões onde não estão ainda desenvolvidas as funções particulares, o que ocorre na maioria das vezes. Com o objetivo de trabalhar com uma função genérica, selecionou-se a de Doorenbos e Kassam (1980). Entretanto, pela natureza desta função, não foi possível formular as respectivas funções características denominadas neste estudo de funções de prejuízo. Apesar da impossibilidade desta formulação, os conceitos da Teoria dos Jogos Cooperativos permaneceram válidos na análise do problema que teve a sua resolução via Programação Linear. Com base em uma outra função genérica, como a de Hargreaves e Christiansen (Dorfman, 1985), funções características poderiam ser definidas e a metodologia adotada neste trabalho poderia ser seguida. Por ser uma função cúbica, particular atenção merece o seu tratamento matemático.

Apesar das funções de Frizzone (1986) e Hogg et al. (1969) serem funções específicas, a formulação das sete funções características em cada caso foi feita genericamente. Assim o trabalho apresenta funções de prejuízo que podem ser usadas no caso de quaisquer outras funções de produção com forma igual a $Y = (a + bx + cx^2)$ ou a $Y = Y_m(a + bx + cx^2)$, independente do significado de x .

Em problemas que envolvem comparação de alternativas de manejo de recursos, usualmente se faz uma análise benefício-custo para sua avaliação. No caso

da metodologia proposta neste artigo, as alternativas de manejo são comparadas através do valor da redução do prejuízo. Para todos os três exemplos estudados, a aliança global e as sub-alianças mostraram valores de prejuízos inferiores aos calculados na ausência das coalizões. Esta situação, vantajosa monetariamente, é refletida nos valores de prejuízos alocados a cada jogador.

No problema de redução dos prejuízos agrícolas considerou-se que os participantes possuíam razões suficientes para constituir as diversas coalizões. O jogo apresentou, portanto, um aspecto cooperativo. Entretanto, em outros casos, os jogadores poderão não demonstrar disposição para formar as coalizões. Em situação de impossibilidade de negociação frente à formação dos grupos, conceitos provenientes da Teoria dos Jogos não Cooperativos poderiam ser usados. Nessa abordagem, cada um busca os seus objetivos sem preocupação com os dos demais e portanto não há função objetivo conjunta.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Silvana Nunes da Costa (Universidade Federal de Viçosa) que forneceu a referência Frizzone (1986). A primeira autora agradece ao PICDT/CAPES que a apoia como aluna no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental do Instituto de Pesquisas Hidráulicas/UFRGS.

REFERÊNCIAS

- BRAS, R.L., CORDOVA, J.R. (1981) Intraseasonal water allocation in deficit irrigation. *Water Resources Research*, v.17, n.4, p.866-874.
- DARIANE, A.B., HUGHES, T.C. (1991) Application of crop yield functions in reservoir operation. *Water Resources Bulletin*, v.27, n.4, p.649-656.
- DOORENBOS, J., KASSAM, A.H. (1980) Efectos del agua sobre el rendimiento de los cultivos. FAO, *Riego Y Drenaje* 33. Roma, 212p.
- DORFMAN, R. (1985) *Planning of irrigation systems under conditions of scarce data*. Tese de doutorado, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, 114p.
- DRIESSEN, T.S.H., TIJS, S.H. (1985) The cost gap method and other cost allocation methods for multiple water projects. *Water Resources Research*, v.21, n.10, p.1469-1475.
- DUDLEY, N.J. (1972) Irrigation planning: 4. optimal interseas water allocation. *Water Resources Research*, v.9, n.3, p.507-522.
- DUDLEY, N.J. (1988) A single decision-maker approach to irrigation reservoir and farm management decision making. *Water Resources Research*, v.24, n.5, p.633-640.
- DUDLEY, N.J.; BURT, D.R. (1973) Stochastic reservoir management and system design for irrigation. *Water Resources Research*, v.24, n.5, p.633-640.
- DUDLEY, N.J., HOWELL, D.T., MUSGRAVE, W.F. (1971) Optimal intraseasonal irrigation water allocation. *Water Resources Research*, v.7, n.4, p.770-788.
- DUDLEY, N.J., REKLIS, D., BURT, D.R. (1976) Reliability, trade-offs and water resource development modeling in multiple crops. *Water Resources Research*, v.12, n.6, p.1101-1108.
- ENGLISH, M. (1990) Deficit irrigation. I: Analytical framework. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, v.116, n.3, p.399-412.
- ENGLISH, M., NUSS, G.S. (1982) Designing for deficit irrigation. *Journal of Irrigation and Drainage Division*, v.108, IR2, p.91-106.
- FERNANDES, S.D.A. (1991) *Prognóstico e otimização do rendimento do milho (Zea Mays L.) no Rio Grande do Sul*. Dissertação de Mestrado. IPIH/UFRGS, Porto Alegre, 204p.
- FRASER, N.M., HIPEL, K.W. (1984) *Conflict analysis: models and resolutions*. North-Holland, 371p.
- FRIZZONE, J.A. (1986) *Funções de resposta do feijoeiro (Phaseolus Vulgaris L.) ao uso de nitrogênio e lâmina de irrigação*. Tese de Doutorado. ESALQ/USP, Piracicaba.
- FRONZA, G., KARLIN, A., RINALDI, S. (1977) Reservoir operation under conflicting objectives. *Water Resources Research*, v.13, n.2, p.296-302.
- GLANTZ, M.H. (1982) Consequences and responsibilities in drought forecasting: the case of Yakima, 1977. *Water Resources Research*, v.18, n.1, p.3-13.
- HEANEY, J.P., DICKINSON, R.E. (1982) Methods for apportioning the cost of a water resource

- project. *Water Resources Research*, v.18, n.3, p.476-482.
- HOGG, H.C., DAVIDSON, J.R., CHANG, J. (1969) Economics of a water-yield function for sugar cane. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, IR1, p.127-138.
- HOWELL, D.T. (1983) Steps towards optimality in irrigation. Scientific Procedures Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems. In *Proceedings of the Hamburg Symposium*. IAHS, Publ. n.147, p.425-435.
- KILGOUR, D.M., FANG, L., HIPEL, K.H. (1992) Game-theoretic analyses of enforcement of environmental laws and regulations. *Water Resources Bulletin*, v.28, n.1, p.141-153.
- KILGOUR, D.M., OKADA, N., NISHIKORI, A. (1988) Load controls regulation of water pollution: an analysis using game theory. *Journal of Environmental Management*, v.27, p.179-194.
- LEJANO, R.P., DAVOS, C.A. (1995) Cost allocation of multiagency water resource projects: game theoretic approaches and case study. *Water Resources Research*, v.31, n.5, p.1387-1393.
- LOEHMAN, E., ORLANDO, J., TSCHIRHART, J., WHINSTON, A. (1979) Cost allocation for a regional wastewater treatment system. *Water Resources Research*, v.15, n.2, p.193-202.
- MARTINEZ JR., F., MARCELLINI, L., BARROS, M.T.L., BRAGA JR., B.P.F. (1991) Alocação de custo em projetos de usos múltiplos de recursos hídricos - uma aplicação à Bacia do Rio Doce. *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos*. ABRH, V.9, n.2, p.127-147.
- MINHAS, B.S., PARIKH, K.S., SRINIVASAN, T.N. (1974) Toward the structure of a production function for wheat yields with dated inputs of irrigation water. *Water Resources Research*, v.10, n.3, p.383-393.
- OKADA, N., HIPEL, K.W., OKA, Y. (1985) Hypergame analysis of the lake Biwa conflict. *Water Resources Research*, v.21, n.7, p.917-926.
- OKADA, N., MIKAMI, Y. (1992) A game-theoretic approach to acid rain abatement conflict analysis of environmental load allocation. *Water Resources Bulletin*, v.28, n.1, p.115-162.
- OWEN, G. (1982) *Game theory*. Academic Press, Orlando, 344p.
- PARFITT, J.M.B. (1991) *Modelos água-rendimento para a cultura da soja (Glycine max L. Merrill) em planossolo Pelotas*. Dissertação de Mestrado. IPH/UFRGS, Porto Alegre, 93p.
- PAUDYAL, G.N., GUPTA, A. (1990) Irrigation planning by multilevel optimization. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, v.116, n.2, p.273-291.
- RAMAN, H., MOHAN, S., RANGACHARYA, N.C.V. (1992) Decision support for crop planning during droughts. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, v.118, n.2, p.229-241.
- RAO, N.H., SARMA, P.B.S., CHANDER, S. (1988) A simple dated water-production function for use in irrigated agriculture. *Agriculture Water Management*, v.13, p.25-32.
- REES, D.H. (1987) Tactical operation of rice irrigation systems during water shortages. Irrigation and Water Allocation. In *Proceedings of the Vancouver Symposium*. IAHS Publ. n.169, p.141-152.
- REES, D.H., HAMLIN, M.J. (1983) The allocation of water for irrigation in times of shortage. Scientific Procedures Applied to the Planning, Design and Management of Water Resources Systems. In *Proceedings of the Hamburg Symposium*. IAHS Publ. n.147, p.437-449.
- SHAPLEY, L.S. (1953) A value for n-person games in contributions to the theory of games II. *Annals Mathemat. Stud.*, V.28, p.303-306.
- SINGH, R., SONI, B., CHANGKAKOTI, A.K. (1987) Optimal utilization of irrigation water in Garufella catchment in Assam, India. Irrigation and Water Allocation. In *Proceedings of the Vancouver Symposium*. IAHS Publ. n.169, p.195-205.
- STEINER, R.A., KELLER, A.A. (1992) Irrigation land management model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, v.118, n.6, p.928-942.
- STEWART, J.I., HAGAN, R.M. (1973) Functions to predict effects of crop water deficits. *Journal of Irrigation and Drainage Division*, v.99, IR4, p.421-439.
- VEDULA, S., MUJUMDAR, P.P. (1992) Optimal reservoir operation for irrigation of multiple crops. *Water Resources Research*, v.28, n.1, p.1-9.
- VEDULA, S., ROGERS, P.P. (1981) Multiobjective analysis of irrigation planning in river basin development. *Water Resources Research*, v.17, n.5, p.1304-1310.
- YOUNG, H.P., OKADA, N., HASHIMOTO, T. (1982) Cost allocation in water resources development. *Water Resources Research*, v.18, n.3, p.4631-475.

Application of Game Theory to Reduce Agricultural Loss Caused by Water Shortage

ABSTRACT

This paper discusses the water shortage situation in an irrigation area which causes reduction of agricultural production and then money loss to farmers. These are motivated to cooperate among themselves in order to minimize this loss. The cooperation relies on the redefinition of water quotas established by the water manager. Once the money loss is reduced by the cooperation action, the question now is how to share this reduction among the cooperative participants. Based on Cooperative Game Theory, the study develops the so called characteristic functions and uses the Shapley value as an allocation method. Three hypothetical examples are analysed and three water production functions applied; two of them are specific and the other one has a generic character.