

LOCALIZAÇÃO DE PIVÔS-CENTRAIS EM ÁREAS COM FRONTEIRA IRREGULAR

Renato Soliani

Depto. de Estruturas

Faculdade de Engenharia Civil – Unicamp

José Antônio Frizzone

Depto. de Engenharia Rural

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"- USP

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para otimizar o posicionamento de pivôs-centrais a serem instalados em pequenas regiões que possuam fronteira irregular. A área a ser irrigada é discretizada e portanto aproximada por uma grade de pontos. Um modelo de programação linear inteira é formulado com o objetivo de maximizar a somatória dos benefícios associados a cada ponto de instalação. Levando-se em consideração a geometria do terreno, é apresentada uma técnica especial para gerar as restrições do modelo de modo a não permitir a superposição das áreas irrigadas de cada equipamento. As soluções são obtidas utilizando-se técnicas de programação linear inteira. Uma das limitações impostas ao modelo aqui desenvolvido, reside no fato de se utilizarem apenas pivôs-centrais de mesmo raio. Desta forma, o modelo aqui apresentado não poderá ser aplicado a projetos que envolvam equipamentos pivôs-centrais rebocáveis. Adota-se ainda a hipótese de que todos os pivôs-centrais possam realizar um giro completo, quando acionados.

INTRODUÇÃO

As pequenas propriedades agrícolas em geral são muito utilizadas para projetos de irrigação e constituem um potencial bastante significativo da agricultura irrigada. Se além da limitação em tamanho, a área a ser irrigada possuir fronteira irregular e o projeto tratar de irrigação por pivôs-centrais, a localização destes equipamentos torna-se uma questão de grande relevância. Este problema foi estudado inicialmente por Anderson et al. (1983), onde foram apresentadas duas estratégias para o posicionamento de pivôs-centrais em pequenas áreas com fronteira irregular. Na primeira estratégia não foi permitida a superposição da área irrigada. O tamanho do pivô-central foi previamente selecionado e o objetivo adotado foi a obtenção do núme-

ro máximo de equipamentos na área. Na segunda estratégia, foi permitida a superposição das áreas irrigadas e o objetivo passou a ser a minimização dos desvios para uma dada aplicação. Os tamanhos dos pivôs-centrais foram sempre constantes, sendo que na primeira estratégia não foi permitido que os equipamentos realizassem a superposição das áreas irrigadas. Nos dois casos, as soluções foram obtidas utilizando-se técnicas de programação linear inteira. Ainda sobre o mesmo problema, Hatch et al. (1985) desenvolveram um modelo de programação linear inteira mista que selecionou posição, tamanho e número de pivôs-centrais e permitiu ainda usos alternativos para a terra, tais como a cultura de sequeiro e o arrendamento. O modelo desenvolvido por estes autores permitiu a escolha do tamanho entre três valores selecionados a priori.

O trabalho que será aqui desenvolvido trará uma nova metodologia para localizar pivôs-centrais em áreas com as características descritas. Será apresentada uma nova forma de gerar as restrições para cada ponto do conjunto de factibilidade de modo a evitar superposições de áreas irrigadas, mas que permitirá o tangenciamento dos mesmos. Um exemplo didático utilizando duas funções objetivo distintas será apresentado.

METODOLOGIA

Um modelo de programação linear inteira foi desenvolvido para determinar o número ótimo de pivôs-centrais, assim como seus respectivos pontos de instalação, de modo a maximizar a somatória dos benefícios associados a estes pontos.

A região contida na Figura 1 foi escolhida para receber os pivôs-centrais. A linha cheia define sua fronteira. Nesta figura, adotou-se um quinto da medida do raio efetivamente molhado pelo pivô-central como o valor da escala para subdividir a área. Foi também considerada a hipótese de que todos os pivôs-centrais possuam o mesmo raio. A

linha pontilhada limita a região de factibilidade e define os pontos potenciais a receber os equipamentos. Esta região é formada apenas por pontos de instalação que permitem um giro completo do pivô-central. Caso a área a ser irrigada possua uma única fonte de captação de água, como por exemplo um poço profundo, será sempre possível alocar o sistema de eixos de modo que esta esteja localizada no ponto (0,0). Se a captação se der ao longo de um rio, deverá ser feito um estudo detalhado para determinar a melhor forma de alocar o sistema de eixos.

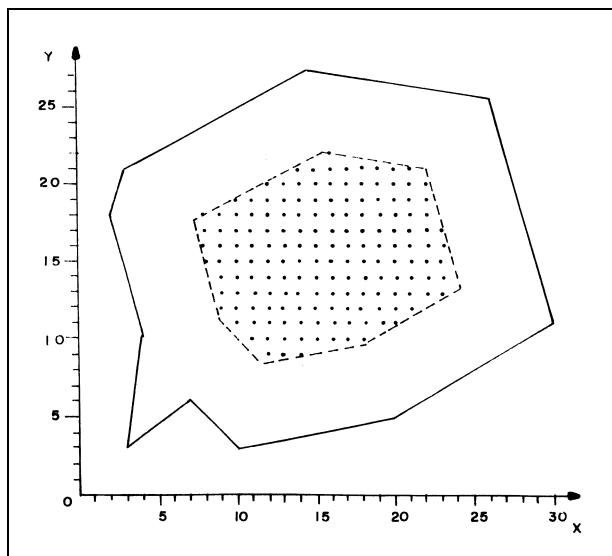


Figura 1. Área discretizada em estudo.

Para ilustrar a situação, suponha que o ponto (16,17) da Figura 1, seja escolhido para receber um pivô-central de raio igual à medida da escala adotada para a grade de pontos. Sua área molhada é representada pelos pontos (15,17), (16,16), (16,17), (16,18) e (17,17). Em contrapartida, qualquer pivô-central instalado em um destes pontos molha o ponto (16,17). Assim, a equação que descreve a aplicação da água no ponto (16,17), restrita a uma rotação, é:

$$\begin{aligned} & 1.P_{15,17} + 1.P_{16,16} + 1.P_{16,17} + 1.P_{16,18} \\ & + 1.P_{17,17} + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

onde $P_{r,s}$ são os outros pontos da região de factibilidade.

A variável $P_{i,j}$ é tal que:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o pivo for instalado no ponto } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrário, } i \in I, j \in J \end{cases} \quad (2)$$

Para o ponto (17,17) tem-se:

$$\begin{aligned} & 1.P_{16,17} + 1.P_{17,16} + 1.P_{17,17} + 1.P_{17,18} + 1.P_{18,17} \\ & + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

e para o ponto (18,17):

$$\begin{aligned} & 1.P_{17,17} + 1.P_{18,16} + 1.P_{18,17} + 1.P_{18,18} + 1.P_{19,17} \\ & + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Observe que a solução $P_{16,17} = P_{18,17} = 1$, ou seja, alocar um pivô-central em (16,17) e outro em (18,17), é impossível para a Restrição (3). Assim, esta forma de estabelecer as restrições do modelo não permite a tangência dos pivôs-centrais, tendo linhas de centro paralelas aos eixos coordenados da grade de pontos que representam a área. Portanto, a metodologia descrita por Anderson et al. (1985) não poderá ser aplicada aqui.

No sentido de adotar o tangenciamento dos pivôs-centrais como uma possibilidade viável, foi proposta a retirada de metade da fronteira da área irrigada de cada um deles, sempre numa mesma posição. Foi escolhido o lado esquerdo superior como sendo a parte a ser retirada. Os pontos "cheios" da Figura 2 representam a área irrigada de um pivô-central com raio irrigado igual ao valor da escala.

Deste modo, a área molhada pelo pivô-central instalado em (16,17) passou a ser representada pelos pontos (16,16), (16,17) e (17,17). Nestas condições as Equações (1), (3) e (4) assumiram respectivamente as formas:

$$\begin{aligned} & 1.P_{16,16} + 1.P_{16,17} + 1.P_{17,17} \\ & + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & 1.P_{17,16} + 1.P_{17,17} + 1.P_{18,17} \\ & + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & 1.P_{18,16} + 1.P_{18,17} + 1.P_{19,17} \\ & + \sum_{r,s} 0.P_{r,s} \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

As Equações (5), (6) e (7) permitem a solução $P_{16,17} = P_{18,17} = 1$, que corresponde a instalar um pivô-central em (16,17) e outro em (18,17). Com isso foi possível gerar pontos de tangência alinhados horizontalmente ou verticalmente. A escala adotada dependerá de cada situação, uma

vez que, quanto menor esta escala, maior será a precisão obtida, porém o número de restrições envolvidas é aumentado. Verificou-se que, de certo modo, a escala de 1/5 do raio irrigado alia precisão e executabilidade ao modelo. Os pontos cheios da Figura 3 representam a área irrigada por um pivô-central com esta escala.

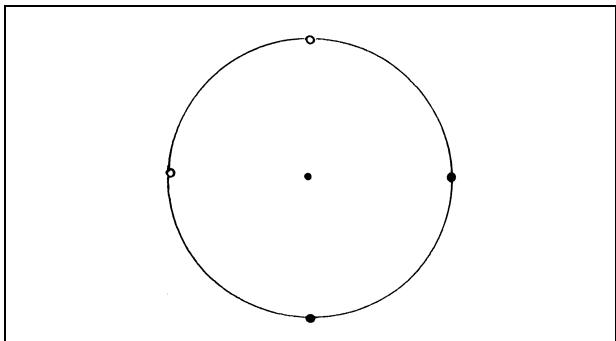


Figura 2. Área do pivô de raio unitário.

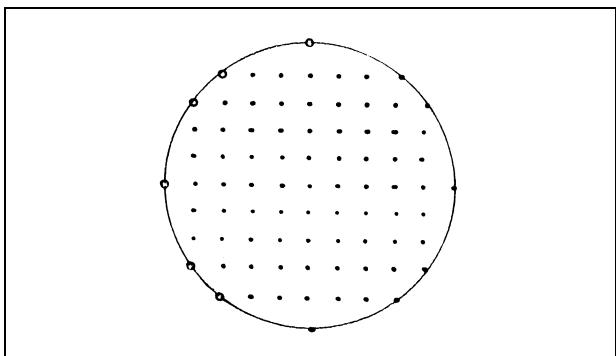


Figura 3. Área do pivô com escala 1/5 do raio.

O conjunto das restrições do tipo (5), escritas para cada ponto do conjunto de factibilidade da região a ser irrigada, pode ser representado na forma matricial por:

$$Ex \leq e \quad (8)$$

onde E é uma matriz de ordem p em que as linhas são formadas pelos elementos 0 e 1 e correspondem a restrições do tipo (5), enquanto que e é o vetor com p componentes iguais a 1.

Definindo para cada (r,s) pertencente à região de factibilidade RF o conjunto:

$$\begin{aligned} \Phi(r,s) = & \left\{ \begin{array}{l} (i,j) \in RF / \\ (i-r)^2 + (j-s)^2 \leq R^2 \end{array} \right\} - \\ & \left\{ \begin{array}{l} (i,j) \in RF / \\ (i-r)^2 + (j-s)^2 = R^2 \text{ e } i < r \\ - \{(r,s+R)\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Com isso tem-se:

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \phi(r,s) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

e o conjunto de restrições a ser obedecido é:

$$\sum_i \sum_j E_{ij} P_{i,j} \leq 1 \text{ para cada } (i,j) \in RF \quad (11)$$

O vetor x utilizado em (8) possui p componentes $P_{i,j}$, onde (i,j) são as coordenadas dos pontos da área discretizada, e representa os candidatos em potencial a receber os pivôs-centrais. Pode-se representá-lo por:

$$x = (P_{1,1}, \dots, P_{n_1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{n_2,2}, P_{1,n}, \dots, P_{n_n,n})^t,$$

com $p = n_1 + n_2 + \dots + n_n$.

O critério a ser otimizado deverá levar em conta a obtenção da máxima cobertura da área irrigada pelos pivôs-centrais. Se estes tiverem o mesmo raio, a função objetivo poderá ser a maximização do número de equipamentos a ser instalado. Observe que se este critério for adotado com várias possibilidades de tamanho para os raios, a tendência do modelo será a da escolha do menor raio, o que aumentaria o custo unitário do hectare irrigado, pois o custo do equipamento é inversamente proporcional ao raio irrigado. Neste trabalho será definido um critério que leve em consideração a adutora e os possíveis pontos de captação de água como componentes do sistema global. A questão da alocação dos eixos coordenados para representar a área deverá ser estudada para cada caso.

Considerou-se que os pontos de instalação mais próximos da fonte de captação de água teriam preferência no critério de otimização, entretanto, poderão existir pontos mais afastados, com condições de cultivo mais favoráveis, embora com custo maior. A cada ponto (i,j) candidato a receber um pivô-central será associado um benefício b_{ij} , definido por uma análise criteriosa das condições de instalação e cultivo.

Para as condições apresentadas na Figura 1, foi adotada a função objetivo:

$$b^t x = \sum_i \sum_j b_{ij} P_{i,j}$$

onde cada coeficiente b_{ij} representa o benefício associado ao ponto (i,j) . Assim por exemplo, $P_{16,17} = 1$ significa que um pivô-central deverá ser

instalado no ponto $(i,j) = (16,17)$. Para $b_{ij} = 1$, qualquer que seja $(i,j) \in RF$, o valor $b^t x = x^t e$ representa o número de equipamentos instalados.

Define-se portanto o problema,

$$\text{Max } b^t x \quad (12)$$

$$\text{s.a. } Ex \leq e \quad (13)$$

$$x = 0/1 \quad (14)$$

$$x \in RF \quad (15)$$

O objetivo (12) é a maximização da soma dos benefícios associados aos pontos de instalação. As restrições (13) distribuem fisicamente os equipamentos de acordo com os critérios estabelecidos, enquanto que (14) e (15) procuram localizá-los na área irrigada.

Se x_{op} representa o valor ótimo do problema (12),...,,(15), então $n_{max} = e^t x_{op}$ fornece o número máximo de equipamentos que a área comporta, segundo o critério adotado. O agricultor irrigante deverá decidir se todos serão instalados ao longo do horizonte de planejamento, ou apenas uma parte deles. Esta questão é de fundamental importância, uma vez, que decidido não instalar o número máximo de equipamentos por alguma limitação de recursos, um novo modelo deverá ser gerado acrescentando-se uma restrição do tipo $e^t x \leq n$, para $1 \leq n \leq n_{max}$.

Observa-se que o modelo (12),...,,(15) pode ser visto como um problema de cortes bidimensionais (cutting stock). No entanto, devido às características geométricas das áreas destinadas a receberem projetos de irrigação, que geralmente não são conexas, as técnicas desenvolvidas para problemas de corte não podem ser aplicadas aqui.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a região da Figura 1, duas estratégias foram utilizadas para localizar os pivôs-centrais, utilizando programação linear inteira. Na primeira, adotou-se a hipótese de que existe uma única fonte de captação de água, e que esta pode ser alo- cada na origem do sistema de coordenadas. Deste modo, os pontos mais próximos dessa fonte teriam preferência na escolha dos pontos de localização, embora possam existir pontos mais afastados com condições de cultivo mais favoráveis. Na segunda estratégia foi adotada a hipótese de que todos os pontos do eixo das abscissas são pontos de captação de água, como por exemplo um rio localizado ao longo deste eixo. De modo geral, cada ponto candidato a receber um pivô-central receberá um

coeficiente (peso ou benefício associado ao ponto), definido após uma análise criteriosa das condições de instalação e cultivo associadas a ele. A solução do problema (9),...,,(12) também fornece o número máximo de pivôs-centrais n_{max} . Neste ponto, o agricultor deverá responder a questão se todos eles serão instalados no horizonte de planejamento. Em caso afirmativo, um cronograma de instalação poderá ser definido pelos valores dos custos associados a cada ponto, ou pela expectativa de retorno do investimento de cada equipamento. Caso a opção do agricultor seja por instalar um número de equipamentos $n < n_{max}$, este deverá ser orientado da possibilidade de que a solução do modelo puderá não permitir a expansão futura para o número máximo de equipamentos. Por exemplo, suponha que na Figura 1, com escala 1/5 do raio irrigado, estejam instalados três pivôs-centrais, respectivamente em (8,18), (12,9) e (21,13). Embora a área permita um projeto com quatro pivôs-centrais deste tipo, não mais será possível a instalação de um novo equipamento, o que reduziria a área total irrigada. Daí a importância da determinação de n_{max} para cada projeto. Caso a decisão seja por instalar n pivôs-centrais, $n < n_{max}$, deve-se ainda resolver o problema:

$$\text{Max } b^t x \quad (16)$$

$$\text{s.a. } Ex \leq e \quad (17)$$

$$e^t x \leq n \quad (18)$$

$$x = 0/1 \quad (19)$$

$$x \in RF \quad (20)$$

O problema (16),...,,(20) pode ser visto como sendo o problema (12),...,,(15) em que a matriz E pos- sgui uma linha a mais, formada inteiramente de ele- mentos iguais a 1.

A Tabela 1 apresenta as soluções de (16),...,,(20) com $b_{ij} = -(i^2 + j^2)^{-1}$, levando em conta a distância à fonte localizada em (0,0) e a Tabela 2 apresenta as soluções para $b_{ij} = -j$, no caso da capta- ção dar-se ao longo de um rio localizado ao longo do eixo das abscissas. As Figuras 4 e 5 representam as soluções indicadas nas Tabelas 1 e 2, respectiva- mente. Estas soluções foram obtidas com o software GAMS, utilizando o solver OSL.

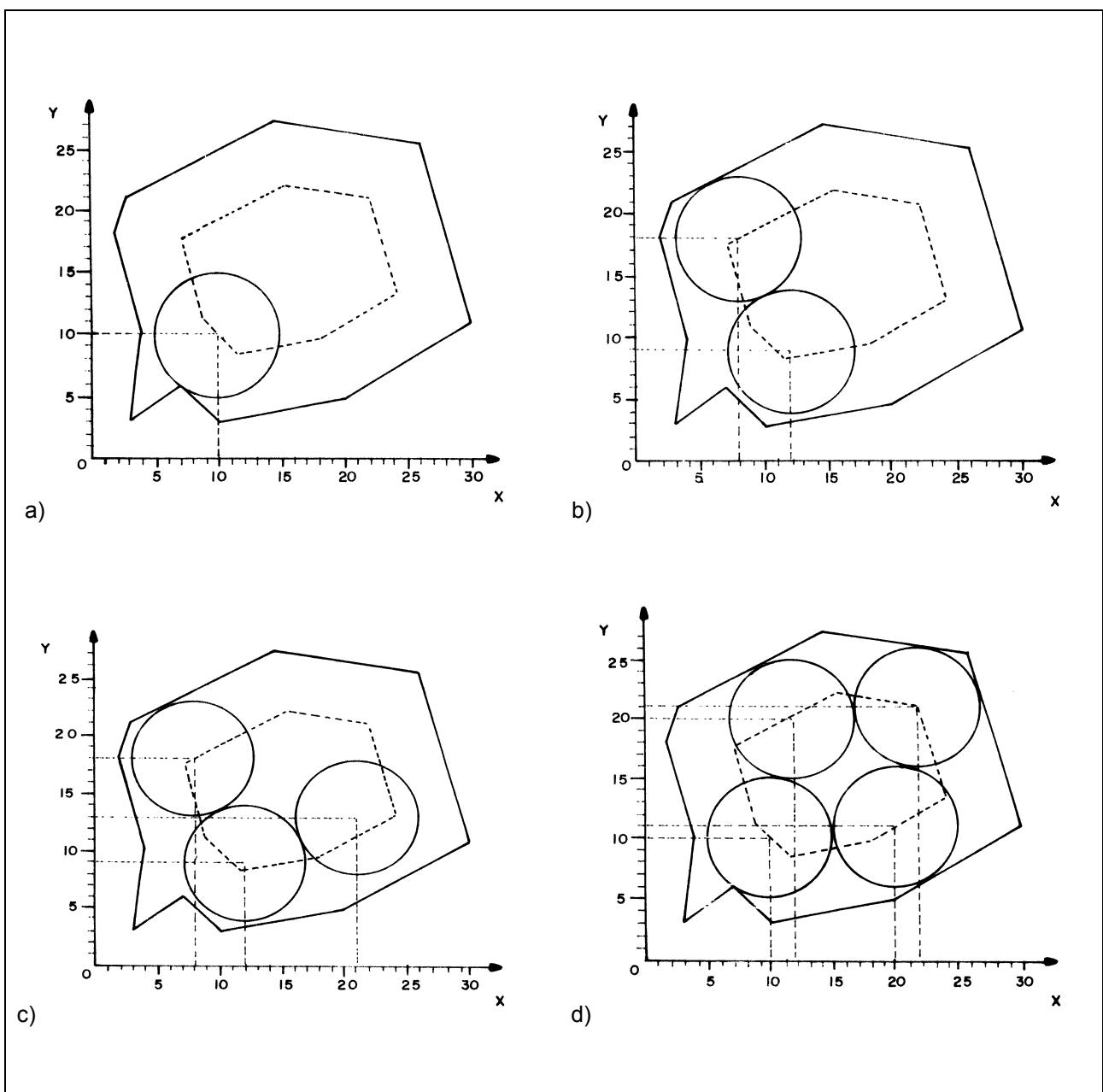
Como futuras pesquisas, observamos que uma forma de tornar mais eficiente a aplicação dos modelos desenvolvidos neste trabalho seria a elab- oração de códigos computacionais que gerem automaticamente o conjunto de restrições do pro- blema (12),...,,(15). Colocamo-nos à disposição dos eventuais interessados neste assunto, no sentido de continuidade desta pesquisa.

Tabela 1. Localização ótima dos pivôs-centrais com $b_{ij} = (i^2 + j^2)^{-1}$.

nº de pivôs-centrais	Ponto alocado	Figura
1	(10,10)	4.a
2	(8,18) (12,9)	4.b
3	(8,18) (12,9) (21,13)	4.c
4	(10,10) (12,20) (20,11) (22,21)	4.d
5	Infactível	

Tabela 2. Localização ótima dos pivôs-centrais com $b_{ij} = -j$.

nº de pivôs-centrais	Ponto alocado	Figura
1	(12,9)	5.a
2	(10,10) (20,11)	5.b
3	(9,18) (13,9) (23,13)	5.c
4	(10,10) (12,20) (20,11) (22,21)	5.d
5	Infactível	

**Figura 4. Alocação de; a) um; b) dois; c) três e; d) quatro; pivôs centrais.**

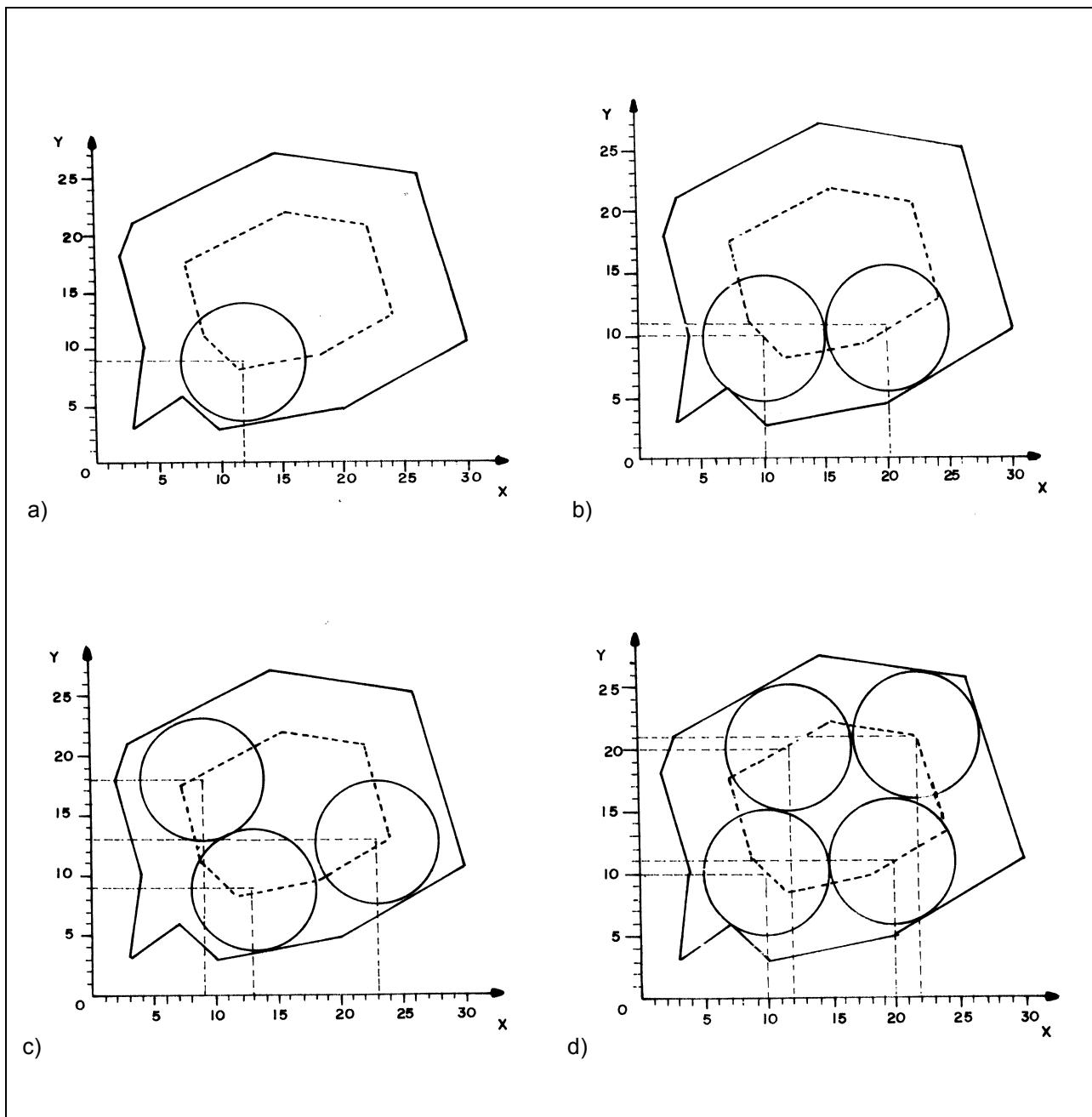


Figura 5. Alocação de; a) um; b) dois; c) três e; d) quatro; pivôs centrais.

CONCLUSÕES

Com a metodologia descrita neste trabalho foi possível otimizar o posicionamento dos pontos de instalação de pivôs-centrais destinados a irrigar pequenas áreas com fronteira irregular. O modelo de programação linear inteira forneceu os pontos e o cronograma para a instalação dos mesmos. A técnica inclui a discretização da área irrigada, onde são definidas as condições de cultivo para cada

ponto, levando em conta os pontos de captação de água. São estudadas restrições que evitam a superposição da aplicação de água assim como objetivos que buscam obter a máxima cobertura da área irrigada.

Um teste de campo envolvendo uma área de fronteira irregular é apresentado e o modelo fornece os pontos de localização para 1 a 4 pivôs-centrais para objetivos que supõe a captação numa única fonte ou ao longo de um rio. O agricultor terá conhecimento do número máximo de equipamen-

tos que a área comporta e ainda, a possibilidade de verificar que os pontos ótimos de instalação dependem do número máximo de equipamentos que o agricultor pretende instalar.

SÍMBOLOS

- b: vetor de componentes b_{ij} que representam os benefícios associados ao ponto (i,j);
- e: vetor com p componentes iguais a 1;
- E: matriz de ordem p formada por elementos E_{ij} iguais a 0 e 1;
- I: conjunto de índices que definem as abscissas dos pontos da área discretizada;
- J: conjunto de índices que definem as ordenadas dos pontos da área discretizada;
- n: número de pivôs-centrais previstos pelo agricultor no horizonte de planejamento;
- n_{\max} : número máximo de pivôs-centrais que a área irrigada comporta;
- p: dimensão do vetor e;
- $P_{i,j}$: variável de decisão 0/1;
- x: vetor de componentes P_{ij} $i \in I, j \in J$;
- RF: região de factibilidade;
- $\Phi(r,s)$: conjunto de pontos factíveis para cada $(r,s) \in RF$.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, C.; ROCHESTER, E. W.; HARDY JUNIOR, W. E. (1985). Position selection of center pivot irrigation systems using linear programming. *Transactions of the ASAE*, v28, n.5, p1551-6, Sept./Oct.
- HATCH, L. U. et al. (1985). Optimal irrigation pivot location on irregularly shaped fields. *Southern Journal of Agriculture Economics*, p163-70, Dec.

Central Pivot Location on Irregularly Shaped Fields

ABSTRACT

This work presents a methodology to optimize the positioning of central-pivots which will be installed in small regions with irregular boundaries. The area to be irrigated is discretized and therefore estimated by a grid of points. A model of integer linear programming is formulated aiming to maximize the sum of benefits associated to each point of installation. A special technique to generate the restrictions of the model in order to prevent superposition of irrigated areas considering field shape is also presented. The solutions of the model are obtained using integer linear programming techniques.