

## APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA E DUAL ESTOCÁSTICA NA OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DO RESERVATÓRIO SOBRADINHO

*Victor Costa Porto<sup>1</sup>; Francisco de Assis de Souza Filho<sup>2</sup>; Taís Maria Nunes Carvalho<sup>3</sup>; Larissa  
Zaira Rafael Rolim<sup>3</sup> & Renata Locarno Frota<sup>3</sup>*

**RESUMO** – O objetivo deste trabalho é comparar a aplicação de duas técnicas de otimização de operação de reservatórios: a Programação Dinâmica Estocástica (PDE) que lida bem com incertezas e não linearidades, porém necessita de grande esforço e a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) que otimiza grandes sistemas rapidamente, mas não trata devidamente as não linearidades. Foi realizada a otimização da operação mensal para o hidrossistema do reservatório Sobradinho para um horizonte de planejamento de um ano. Foram considerados os usos d'água para irrigação e produção de hidroeletricidade. A avaliação das técnicas se deu por meio dos tempos de processamento e da performance das regras ótimas para um ano médio de vazões afluentes. A PDDE se mostrou cerca de 261 vezes mais rápida que a PDE e obteve desempenho semelhante. Entretanto, devido as linearizações, a PDDE não tem sensibilidade em relação ao nível reservatório na geração de energia. Apesar de o objetivo da otimização, por questão de simplicidade, só ter considerado a produção de energia e as demandas de água para irrigação, a metodologia de formação da função objetivo e formulação do problema pode ser facilmente estendida para os outros usos da água e hidrossistemas maiores.

**ABSTRACT**– The objective of this work is to compare the application of two reservoir operation optimization techniques: Stochastic Dynamic Programming (SDP) that deals well with uncertainties and nonlinearities but requires a great deal of effort and the Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP) large systems quickly, but does not properly address nonlinearities. The Optimization of the monthly operation for the Sobradinho reservoir hydrosystem was carried out for a one-year planning horizon. The uses of water for irrigation and the production of hydroelectricity were considered. The evaluation of the techniques occurred through the processing times and the performance of the optimal rules for an average year of affluent flows. SDDP was about 261 times faster than SDP and achieved similar performance. However, due to linearization, the SDDP has no sensitivity in relation to the reservoir level in the generation of energy. Although the objective of optimization, for the sake of simplicity, only considered the energy production and water demands for irrigation, the methodology of formation of the objective function and formulation of the problem can easily be extended to other uses of water and greater hydrosystems.

**Palavras-Chave** – Otimização da Operação de Reservatórios; Múltiplos Usos da Água;  
Programação Dinâmica Dual Estocástica

---

1) Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos da Universidade Federal do Ceará (UFC), [victorcporto@gmail.com](mailto:victorcporto@gmail.com)  
2) Dr. Professor do Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental da Universidade Federal do Ceará (DEHA-UFC), [assis@ufc.br](mailto:assis@ufc.br)  
3) Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos da Universidade Federal do Ceará (UFC), [taismarianc@gmail.com](mailto:taismarianc@gmail.com);  
[larissazairarr@gmail.com](mailto:larissazairarr@gmail.com); [renata.locarno@hotmail.com](mailto:renata.locarno@hotmail.com)

## INTRODUÇÃO

A operação de hidrossistemas define o volume hídrico que será armazenado e o destinado a atender os usos múltiplos da água. É um processo de tomada de decisão que envolve diversos setores da sociedade e se caracteriza como um estágio fundamental da gestão eficiente dos recursos hídricos (CID, 2017).

Além disso, lida com variáveis complexas como as demandas hídricas de diversos setores e a produção de energia. Devido ao caráter estocástico das afluências, esta tomada de decisão ocorre em meio à incerteza e deve ser assistida por modelos de simulação e otimização para que se encontre soluções de performance satisfatórias (Labadie, 2004).

Entretanto, a aplicação de técnicas matemáticas de otimização à operação de hidrossistemas não é tarefa simples uma vez que deve tratar com incertezas, não linearidades e multiobjetividade (Rani e Moreira, 2009).

Dentre as técnicas de otimização matemática aplicadas à operação de reservatórios, tem destaque a Programação Dinâmica Estocástica (PDE) por encontrar a solução ótima considerando a distribuição de probabilidade das vazões afluentes em cada estágio do problema e por ser flexível ao lidar bem com não linearidades e até mesmo descontinuidades (BARROS, 2003). Entretanto a PDE sofre do chamado mal da dimensionalidade requerendo grande esforço computacional e sendo inviável para hidrossistemas maiores.

Visando tornar possível o emprego da PDE para grandes sistemas de reservatórios, Pereira e Pinto (1989) apresentaram a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) que evita a discretização ao tratar de forma analítica e resolver o problema iterativamente em dois estágios (um regressivo e outro progressivo) por meio da decomposição de Benders para aproximar as funções de custo futuro a funções lineares por partes. Desta forma, a PDDE não sofre do mal da dimensionalidade, por não necessitar da discretização das variáveis, porém, necessita a linearização do problema.

A PDDE é a técnica de otimização empregada nos modelos NEWAVE e DECOMP (Maceira et al., 2002), desenvolvidos pela CEPEL, que são os utilizados pelo ONS para operar o todo o sistema de produção de energia hidrotérmica no Brasil.

O objetivo deste trabalho é comparar a performance destas duas técnicas de otimização de operação de reservatórios a Programação Dinâmica Estocástica e a Programação Dinâmica Dual

Estocástica considerando os usos múltiplos da água para o hidrossistema do reservatório Sobradinho na Bacia do Rio São Francisco.

## MÉTODOS

Foi realizada a otimização da operação mensal do reservatório Sobradinho para um horizonte de planejamento de um ano. Foram considerados os usos d'água de agricultura de irrigação e produção de hidroeletricidade.

### Base de Dados

Para a realização deste trabalho foram necessários dados operacionais do reservatório (capacidade, cota-área-volume, lâmina evaporada mensal média, restrições operativas, etc.) e da usina de Sobradinho (potência instalada, cota do canal de fuga, produtibilidade específica, restrições, perda de carga hidráulica, etc.) que foram obtidos juntamente com a série histórica de vazões incrementais afluentes através do Operador Nacional do Sistema.

A série histórica de vazões afluentes médias mensais obtida é referente ao período de janeiro de 1931 a dezembro de 2015, totalizando 85 anos.

Também foram necessários dados das demandas de irrigação da Bacia do Rio São Francisco, mais especificamente do Médio São Francisco. Estas demandas foram obtidas do Plano de Recursos Hídricos da Bacia do Rio São Francisco (ANA, 2016).

### Modelagem do Hidrossistema

O hidrossistema em que serão aplicadas as técnicas de otimização por este trabalho é o composto pelo reservatório Sobradinho, sua usina de produção de energia hidrelétrica e suas demandas por água para irrigação.

O reservatório Sobradinho é o de maior capacidade de armazenamento da Bacia do Rio São Francisco. As características referentes aos volumes operacionais, demandas para irrigação e potencial hidroelétrico da usina estão apresentados na Tabela 1.

*Tabela 1 - Características do Hidrossistema do Reservatório Sobradinho*

<b>Sobradinho</b>	
<b>Volume Máximo (hm<sup>3</sup>)</b>	34116.0
<b>Volume Mínimo (hm<sup>3</sup>)</b>	5447.0
<b>Demandas para Irrigação (m<sup>3</sup>/s)</b>	136.7
<b>Potência Instalada (MW)</b>	1050.0
<b>Produtibilidade Específica (MW/m<sup>3</sup>/s/m)</b>	0.00902

A operação mensal do reservatório do hidrossistema foi modelada por meio da equação do balanço hídrico, ainda foi considerado que a demanda de irrigação era retirada da vazão afluente ao reservatório.

Deste modo, a equação de operação do reservatório pode ser escrita como:

$$S_{t+1} = S_t + W_t - Evap(t, S_t) - u1_t - u2_t - u3_t$$

em que,  $S$  é a variável de estado: o armazenamento no reservatório;  $W$  é a variável estocástica: as vazões incrementais ao reservatório.  $Evap$  é o volume evaporado no período  $t$  reservatório;  $u1$ ,  $u2$  e  $u3$  são as variáveis de decisão, respectivamente, quanto à vazão turbinada, destinada a irrigação e vertida.

A demanda de irrigação média foi associada a um fator de sazonalidade (Lopes et al., 2002), conforme a Tabela 2, para se obter a demanda de cada mês que foi então considerada uma restrição operativa.

*Tabela 2 - Fator de Sazonalidade para as Demandas de Irrigação (Lopes et al., 2002)*

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1.144	0.877	0.839	0.815	0.912	0.839	0.884	1.001	1.113	1.286	1.189	1.101

A produção de energia da usina de Sobradinho foi modelada como:

$$P = \eta * u1 * H$$

em que,  $P$  é a potência média produzida pela usina no intervalo  $t$  em MW;  $\eta$  é a produtibilidade específica da usina em MW/m<sup>3</sup>/s/m,  $u1$  é a vazão turbinada em m<sup>3</sup>/s e  $H$  é a Altura de Queda Líquida em metros medida entre o nível da água no reservatório e a cota do canal de fuga e com a retirada das perdas de carga hidráulica.

### Modelagem das Vazões Afluentes

Para a aplicação das técnicas estocásticas de otimização, é necessário determinar a distribuição de probabilidade das vazões afluentes. Foi considerado que os valores mensais de vazões da série histórica ocorriam de modo equiprobabilístico, ou seja, considera que os valores observados para um mês na série histórica possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

### Função Objetivo

A função objetivo consiste em definir os critérios para os quais serão avaliadas as possíveis soluções para que seja então encontrada a ótima.

Para o hidrossistema modelado, a função objetivo foi dividida em três partes, uma para a irrigação, uma para a produção de energia e outra para o volume de água armazenado no reservatório após o último intervalo de tempo.

Para a irrigação, foi considerado a minimização das demandas não abastecidas (minimizar o déficit de abastecimento). Este déficit foi parametrizado com base no seu valor máximo para que a função varie de 0 a 1 em cada estágio do problema, conforme:

$$f = \sum_{t=1}^{12} (Dirrig_t - u2_t) / Dirrig_t$$

onde, f é a função a ser minimizada; Dirrig é a demanda de irrigação para o mês t; u2 é a vazão destinada à irrigação pela operação do reservatório no intervalo t.

De modo semelhante à irrigação, a produção de energia foi considerada na função com parametrização em relação ao potencial instalado. O que resultou em:

$$f = \sum_{t=1}^{12} (Pinstal - P(u1_t)) / Pinstal_t$$

em que, Pinstal é o potencial instalado no reservatório em MW; P é a potência média produzida no reservatório pela vazão turbinada u1 no intervalo t.

O armazenamento ao fim do último estágio foi considerado na função objetivo como uma função de custo final ( $\omega$ ). Foi determinado uma função  $\omega$  de acordo com a distância entre o armazenamento final e metade capacidade do reservatório de forma que penalizem as políticas de operação que esvaziem o reservatório, caso o armazenamento fosse maior que metade da capacidade, o custo final seria nulo. Assim  $\omega$  para um reservatório é definido como:

$$\omega = \text{Max}[0 ; 2 * (0.5 * V_{útil} - s_{T+1})]$$

em que  $s_{T+1}$  é o volume no final da operação de um reservatório em  $\text{hm}^3$ .

Desta forma,  $\omega$  é um valor que varia de 0 a 1.0 conforme o armazenamento final do reservatório.

Para combinar estes três objetivos em uma só função objetivo, foi utilizado o método das ponderações. Foram atribuídos os pesos  $\alpha$  e  $\beta$  e  $\gamma$  para, respectivamente, a produção e energia, a irrigação e o armazenamento final.

Uma vez que os objetivos já eram adimensionais, não existem problemas com unidades ao somá-los. Para manter a ordem de variação numérica dos objetivos (de 0 a 1 em cada intervalo) foi

determinado que a soma de  $\alpha$  e  $\beta$  deve ser 1. O que resultou na seguinte função objetivo final para o hidrossistema:

$$FO = \min[\gamma\omega + \alpha \sum_{t=1}^{12} \frac{(P_{instal} - P(u1_t))}{P_{instal}} + \beta \sum_{t=1}^{12} \frac{(Dirrig_t - u2_t)}{Dirrig_t}]$$

O parâmetro  $\gamma$  é utilizado para aumentar ou diminuir a importância do armazenamento final na função objetivo. Para este trabalho foram utilizados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  iguais, respectivamente, a 0.5, 0.5 e 2.

### **Aplicação das Técnicas de Otimização**

As técnicas de otimização (Programação Dinâmica Estocástica e Programação Dinâmica Dual Estocástica) foram aplicadas ao hidrossistema por meio de desenvolvimento de código computacional na Linguagem Julia com o emprego do pacote StochDynamicProgramming (Vincent Leclère, 2016).

Para a aplicação da Programação Dinâmica Estocástica, foi necessário definir um grau de discretização visto as variáveis do problema serem continuas. Foi adotado grau de discretização de 20 partes.

Também, para a aplicação da PDE, foi realizada uma redução na equação de modelagem do hidrossistema ao considerar o vertimento como volume armazenado que for maior que o máximo:

$$u3 = vert_t = \max[0; s_t + w_t - Evap(t, s_{t+1}, s_t) - u1 - u2 - Vol_{máx}]$$

Desta forma, uma variável de decisão é retirada do problema diminuindo, assim, as necessidades computacionais e este modelo foi denominado de Modelo Reduzido.

Para a aplicação da PDDE foi necessário tornar linear as equações do problema. Para isto, foi aproximada uma relação linear entre área de superfície e volume do reservatório e considerada uma altura média de queda líquida constante na equação de geração de energia.

Além disso, foi considerado volume inicial de metade do volume útil para todas as otimizações realizadas.

### **Avaliação de Performance**

Foram comparados os tempos de processamento e performance para a PDE com seus diferentes graus de discretização e a PDDE.

A performance foi avaliada com base no valor da função objetivo obtida com a simulação da operação para o cenário médio de vazões afluentes considerando a regra de operação otimizada para a série histórica.

Para que não seja considerado o impacto da adoção da queda líquida média sobre o valor da função objetivo, a função objetivo é recalculada sem as linearizações após a otimização da PDDE.

Visto a necessidade de comparar velocidades de processamento, foi necessário a definição de uma máquina padrão cujas configurações foram: processador (core i7) de 3.41 GHz e memória RAM de 16 Gb. Ainda, é realizada uma limpeza na memória do sistema antes de cada uma das otimizações.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os tempos de processamento de processamento da PDDE e da PDE (modelo original e reduzidos para grau de discretização igual a 20) e o valor obtido da função objetivo estão apresentados na Tabela 3.

*Tabela 3 - Tempos de Processamento e Performances das Otimizações*

	PDE Original	PDE Reduzido	PDDE
Tempo de Processamento	02:52:35	00:15:35	00:00:40
Valor da Função Objetivo	4.23	4.22	4.13

A otimização por meio da PDDE foi cerca de 261 vezes mais rápida do que a PDE para o modelo original e aproximadamente 24 vezes em relação a PDE sobre o modelo reduzido.

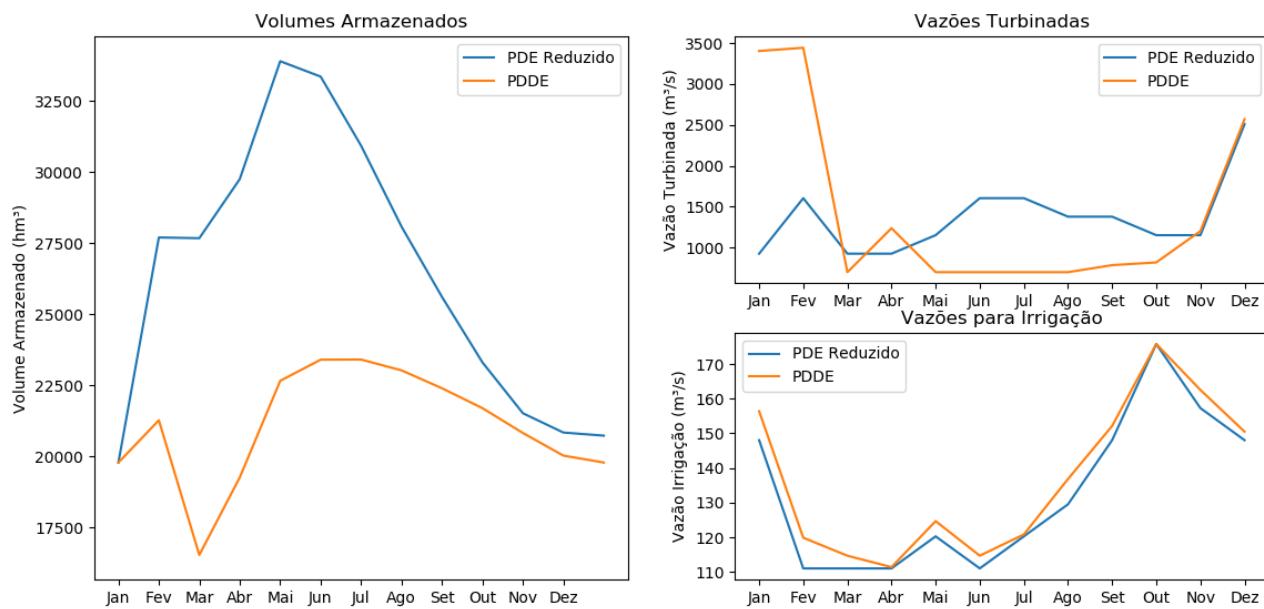
Se verifica que o aumento de uma variável de decisão fez com que o modelo original necessitasse de um tempo de processamento cerca de 11 vezes maior que o reduzido o que mostra a grande sensibilidade desta técnica às dimensões do problema, o famoso ‘mal da dimensionalidade’.

A PDDE também se mostrou mais eficiente que a PDE para o grau de discretização utilizado.

O Modelo Reduzido não é só mais rápido, mas também tem melhor desempenho que o original. Isto se deve pelo modelo reduzido não perder precisão ao discretizar os vertimentos. Dessa forma, os custos de ambos tendem a se igualar com o aumento do grau de discretização.

Os valores das variáveis de estado e decisão para os dois métodos (PDDE e o da PDE para o Modelo Reduzido) obtidos na simulação do hidrossistema composto por Sobradinho para o cenário médio de vazões afluentes estão ilustrados graficamente na Figura 1.

Figura 1 - Comparação da Regra de Operação Obtida pela PDDE e a PDE para o Modelo Reduzido



A perda de sensibilidade para a altura de queda, devido à linearização da função objetivo, na geração de energia pode ser visualizada pela comparação entre os volumes da simulação da PDE e da PDDE.

Na operação ótima da PDDE (que sofreu linearização) não há uma busca em aumentar os volumes armazenados para então turbinar vazões maiores com quedas maximizadas como pode ser observado na operação da PDE que aumenta o nível do reservatório para próximo do máximo nos primeiros meses da operação.

Este foi um dos fatores responsáveis pelo maior desempenho da operação da PDE para altos graus de discretização em comparação com a PDDE conforme apresentado na Tabela 4 para a PDE para o modelo Reduzido.

Tabela 4 - Influência do Grau de Discretização na PDE Reduzida

Grau de Discretização	Tempo de Processamento	Valor Função Objetivo	Tempo / Grau de Discr.
5	00:00:13	-	00:00:03
10	00:01:48	-	00:00:11
15	00:06:17	4.32	00:00:25
20	00:15:35	4.22	00:00:47
30	00:55:59	4.19	00:01:52
40	02:15:06	4.12	00:03:23
50	04:28:15	4.09	00:05:22

É verificada a sensibilidade dos resultados e do tempo de processamento da PDE para o grau de discretização utilizado. Para discretizações menores do que 15, a PDE não encontra política ótima que simule algum dos cenários.

Observa-se que o ganho marginal de eficiência (diminuição dos custos) é decrescente enquanto que o crescimento marginal do tempo de processamento é crescente, logo existe um nível de discretização em que o ganho de desempenho com o seu aumento é quase nulo e que necessita de um grande tempo de processamento adicional.

Quanto à comparação das eficiências da PDDE e da PDE, ao analisar apenas a Tabela 3, aparentemente as políticas de operação da PDDE são mais eficientes (possuem custos menores) que as da PDE para o grau de discretização utilizado (grau 20).

Entretanto, conforme a Tabela 4, com o aumento do grau de discretização (a partir de 40) a PDE para o Modelo Reduzido supera a eficiência da PDDE a preço de tempo de processamento que é significativamente superior 2 horas e 15 minutos para 40 graus de discretização e 4 horas e 28 minutos para 50 graus contra os 51 segundos da PDDE. Por este ponto de vista, a aplicação da PDDE na otimização é vantajosa visto os baixos tempos de processamento e eficiência semelhante à da PDE.

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A Programação Dinâmica Dual Estocástica se mostrou eficiente em otimizar o hidrossistema requerendo baixo custo computacional e obteve desempenho satisfatório. Entretanto, a técnica apresenta limitações quanto à modelagem do problema, restrições e função objetivo que devem ser lineares. O que causa perda de precisão e desempenho quando comparada com a Programação Dinâmica Estocástica que é flexível.

Desta Forma, por não necessitar de simplificações lineares, a Programação Dinâmica apresentaria melhor desempenho, entretanto o seu custo computacional devido ao mal da dimensionalidade a tornaram inviável.

Apesar de o objetivo da otimização, por questão de simplicidade, só ter considerado a produção de energia e as demandas de água para irrigação, a metodologia de formação da função objetivo e formulação do problema pode ser facilmente aplicada para os outros usos da água e ser aplicada em hidrossistemas maiores como no da Bacia do Rio São Francisco.

Como forma de tornar mais rápida a Programação Dinâmica Estocástica é sugerida a utilização de paralelismo visto que o problema é resolvido em estágios podendo facilmente ser paralelizado.

A Linguagem Julia e o seu pacote StochDynamicProgramming que foram as ferramentas utilizadas por este trabalho, apresentaram alto nível e alto desempenho. É recomendada para trabalhos futuros a aplicação desta metodologia utilizando outra linguagem computacional para comparar as performances.

## REFERÊNCIAS

- BARROS, M. T. L. *et al.* Optimization of Large-Scale Hydropower System Operations. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 129, n. June, p. 11, 2003.
- CID, D. *Alocação Intertemporal e Múltiplos Usuários: Estudo De Caso Sistema Jaguaribe-Metropolitano*. 2017.
- LABADIE, J.W. Optimal Operation of Multireservoir Systems: State-of-the-Art Review. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 130, n. 2, p. 93- 11, 2004.
- LOPES, J.E.G.; BARROS, M.T.L.; BRANDÃO, J.L.B. Projeto de gerenciamento integrado das atividades desenvolvidas em terra na bacia do São Francisco - subprojeto 4.4: determinação de subsídios para procedimentos operacionais dos principais reservatórios da bacia do São Francisco. Brasília: ANA/GEF/PNUMA/OEA, Novembro 2002.
- MACEIRA, M. *et al.* *Chain of optimization models for setting the energy dispatch and spot price in the Brazilian system NEWAVE E DECOMP - Descrição*. Power System Computation Conference, n. June, p. 24–28, 2002.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*. *Mathematical Programming*, v. 52, n. 1–3, p. 359–375, 1991.
- RANI, D.; MOREIRA, M. M. Simulation-optimization modeling: A survey and potential application in reservoir systems operation. *Water Resources Management*, v. 24, n. 6, p. 1107–1138, 2009.
- VICENT L. *StochDynamicProgramming – Julia Package*. in:  
<https://github.com/JuliaStochOpt/StochDynamicProgramming.jl>, 2016.