

# ESTUDO NUMERICO DA INTERAÇÃO NÃOLINEAR ONDA-CORPO PELO METODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

*Nordino Martinho Muaievela<sup>1\*</sup> & José Paulo Soares de Azevedo<sup>2</sup>*

## **Resumo**

Neste trabalho apresentou-se um modelo bidimensional do problema de interação não linear de onda-corpo fixo e com superfície imersa em uma região de profundidade variável. O problema foi solucionado com o emprego do método de elementos de contorno formulado a partir das identidades de Green. A geometria do contorno e as funções foram interpoladas usando-se elementos de contorno isoparamétricos quadráticos. As singularidades nos cantos foram resolvidas pela consideração do nó duplo e o método de Runge-Kutta da quarta ordem foi usado para a marcha no tempo. As integrais singulares e quase singulares foram tratadas pelo esquema de Telles e Oliveira (1994), a degeneração das aproximações geométrica e funcional devidas ao deslocamento do nó central durante o avanço no tempo foi evitada pela relocação do nó central (Azevedo, 1991; Jaime, 1995). O modelo apresentado foi capaz de reproduzir satisfatoriamente a variabilidade da superfície livre em toda extensão incluindo pontos em contato com o corpo e não houve necessidade do uso esquemas de suavização.

**Palavras-Chave:** Método de Elementos de Contorno, Ondas não lineares.

## NUMERICAL STUDY OF NONLINEAR WAVE-BODY INTERACTION BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

### **Abstract**

A two-dimensional model for nonlinear problem of interaction wave-body with surface immersed in a region of varying depth is presented. The problem was solved by using quadratic isoparametric boundary elements to solve the boundary value problems at each time step. The singular and quasi-singular integrals were treated by Telles and Oliveira (1994) scheme. In the corner, to overcome the problem of singularities, the concept of double node was considered and the Runge-Kutta fourth order method was used to march in time. It was necessary to use the relocation of the central node (Azevedo, 1991, Jaime, 1995) in order to avoid degeneration of the geometric and functional approximation during the time stepping. The presented model was able to reproduce the variability of the free surface throughout including points in contact with the body without any smoothing scheme.

**Keywords:** Boundary Element Method; Nonlinear Wave

---

<sup>1</sup> Doutorando do Programa de Engenharia Civil (Laboratório de Hidráulica Computacional)-UFRJ/COPPE, muaievela@coc.ufrj.br

<sup>2</sup> Professor associado do Programa de Engenharia Civil (Laboratório de Hidráulica Computacional)-UFRJ/COPPE, zepaulo@coc.ufrj.br

## 1. INTRODUÇÃO

Ondas ocorrem frequentemente na superfície da água em rios, lagos e oceanos. Embora sejam exuberantes em sua forma e fascinantes em termos da capacidade de quebrarem quando atingem regiões de baixa profundidade em relação a sua altura, elas podem causar grandes danos em propriedades costeiras, em estruturas de grande utilidade econômica e ou social. Estes e outros fatores concorrem para que sua descrição tenha merecido atenção científica.

Na modelagem numérica de ondas, Ursell (1949) é um dos pioneiros em estudos de geração e propagação de ondas. O primeiro trabalho reconhecidamente marcante na solução numérica do problema de ondas usando informações apenas do contorno pertence a Longuet-Higgins e Cokelet (1976), no qual usando a equação integral de contorno e introduzindo uma formulação mista Euleriana-Lagrangeana estudaram a propagação de ondas periódicas até o arrebitamento num espaço conformalmente transformado.

Grilli *et al.* (1989) usaram o esquema de avanço no tempo proposto por Dold e Peregrine (1984) e apresentaram um método de elementos de contorno com aproximação de alta ordem (cúbica). A equação integral de contorno foi formulada a partir do espaço livre de funções de Green. Eles trabalharam no espaço físico e incluíram mecanismos de geração e absorção da onda embora tenham dado mais ênfase ao método numérico de solução.

Azevedo (1991) empregou o método de elementos de contorno para simular ondas periódicas até o instante imediatamente antes da quebra. Usou elementos isoparamétricos quadráticos na discretização do contorno e um esquema de Runge-Kutta da quarta ordem para o avanço no tempo. Outro aspecto importante foi a introdução da relocação do nó central de elementos que ocorre quando eles se afastam das posições centrais evitando a degeneração da aproximação da geometria e das funções que ocorre com o avanço no tempo pela formulação Lagrangeana. Os cantos tiveram tratamento semelhante ao apresentado por Grilli *et al.* (1989).

Grilli *et al.* (1997) aplicaram o método de elementos no contorno desenvolvido por eles em 1989 e estudaram os mecanismos de geração e absorção de ondas periódicas não lineares. No mecanismo de geração usaram solução exata da teoria não linear de ondas para a função de corrente e evitaram a deriva de massa pela consideração de uma velocidade média igual e oposta a velocidade de transporte de massa média da onda.

Koo e Kim (2004) estudaram o problema de interação entre ondas longas e corpos livremente flutuantes em um tanque numérico bidimensional não linear de fundo liso e horizontal pelo método de elementos de contorno. Usaram o método de Runge-Kutta da quarta ordem para a marcha no tempo e houve a necessidade de suavização e relocação dos nós na superfície livre. A técnica de praia absorvente foi empregue para evitar a reflexão de ondas na parede rígida da extremidade final do tanque e também para evitar a re-reflexão das ondas no gerador de ondas localizado no início do tanque numérico. Em 2007, os mesmos autores aplicaram o método de elementos de contorno com discretização em painéis constantes e variação linear das variáveis com procedimentos semelhantes para estudar a interação entre ondas e estruturas penetrantes para os casos de uma e duas estruturas contendo um certo intervalo espacial entre elas.

Neste trabalho, propõe-se o estudo da interação não linear de onda-corpo em uma região de profundidade variável pelo método de elementos de contorno com aproximação isoparamétrica quadrática e avanço no tempo através do método de Runge-Kutta da quarta ordem a partir da implementação desenvolvida por Azevedo (1991).

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Considerando que a água é um fluido incompressível, não viscoso e o escoamento é irrotacional e, partindo da equação de conservação de massa conjugada com a existência do potencial de velocidade devido à irrotacionalidade, este potencial obedece à equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad , \quad \vec{x} \in \Omega(t) \quad (1)$$

Onde  $\phi(\vec{x}, t)$  é o potencial de velocidade,  $\vec{x} = (x, y)$  é o vetor posição em coordenadas cartesianas,  $t$  é tempo e  $\Omega$  representa o domínio ou região em estudo.

O domínio ou região do estudo no instante inicial está indicado na Figura 1.

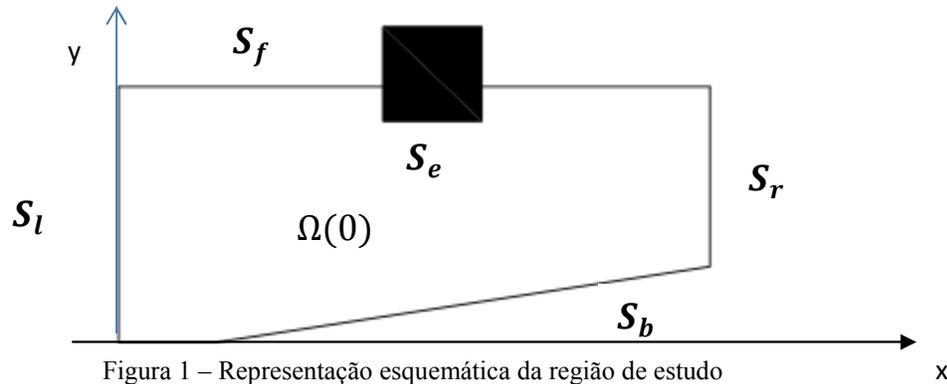


Figura 1 – Representação esquemática da região de estudo

Nesta figura, estão representados os contornos lateral esquerdo  $S_l$ , fundo  $S_b$ , lateral direito  $S_r$ , superfície livre  $S_f$ , superfície molhada do corpo fixo  $S_e$  e o domínio  $\Omega$  no instante inicial.

As ondas são geradas pelo movimento do contorno lateral esquerdo comumente referido como gerador de onda, que neste caso é do tipo pistão. O pistão descreve um movimento em direção ao corpo fixo. Cada contorno possui uma dinâmica e geometria própria descrita por meio de equações das quais algumas características são bem conhecidas e outras constituem variáveis desconhecidas e indispensáveis para a descrição completa do sistema.

No caso do contorno que representa a superfície livre, a posição exata em instantes futuros é desconhecida e partes das componentes das forças que nela atuam também são desconhecidas. Porém, essas características devem obedecer em qualquer instante as seguintes condições de contorno, cinemática e dinâmica, respectivamente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla \phi, \quad \vec{x} \in S_f \quad (2)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - g\eta - \frac{p_a}{\rho}, \quad \vec{x} \in S_f \quad (3)$$

Onde  $\eta(x, t)$  é a elevação da superfície livre em relação ao nível da água em repouso.

$g$  é aceleração de gravidade,  $p_a$  é a pressão atmosférica e  $\rho$  é a massa específica da água.

No contorno lateral esquerdo (gerador de ondas) prescrevem-se a posição e a derivada normal do potencial, i.e. a velocidade normal conforme as equações abaixo:

$$x = x(t), \quad \vec{x} \in S_l \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n(t), \quad \vec{x} \in S_l \quad (5)$$

No fundo, na superfície molhada do corpo e no contorno lateral direito, condições de fluxo nulo são consideradas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \vec{x} \in S_b, \vec{x} \in S_s \text{ e } \vec{x} \in S_r \quad (6)$$

As condições de contorno do gerador de ondas (parede lateral esquerda) merecem uma atenção específica e serão sucintamente descritas na próxima seção.

## 2.1 Geração de Onda

Com o intuito de gerar ondas não lineares na superfície livre em situações mais realísticas que possam ser replicadas em tanques experimentais, optou-se por empregar uma descrição da cinemática do gerador. Assim, considera-se que o pistão exerce movimento variado e cíclico. Em tal movimento é conhecida a velocidade do pistão perpendicular à direção do seu comprimento e o deslocamento como funções do tempo.

$$x(t) = B - B * \cos(\omega * t) \quad (7)$$

$$v(t) = B * \omega * \sin(\omega * t) \quad (8)$$

Onde  $\omega$  é a frequência cíclica do movimento e  $B$  é a metade do deslocamento máximo do pistão.

## 3. SOLUÇÃO NUMÉRICA

Escolhendo  $\phi$  como solução da equação de Laplace e  $\varphi$  como solução fundamental, a equação (1) pode ser transformada na terceira identidade de Green para o contorno:

$$\alpha(\vec{x}_i) \phi(\vec{x}_i) + \int_S \phi(\vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}_i, \vec{x})}{\partial n} dS(\vec{x}) = \int_S \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} \varphi(\vec{x}_i, \vec{x}) dS(\vec{x}) \quad (9)$$

Onde  $\alpha(x_i)$  é função do ângulo  $\theta$  interior do contorno no ponto fonte  $x_i$  e é dado por

$$\alpha(x_i) = \frac{\theta}{2\pi} \quad (10)$$

$$\varphi(\vec{x}_i, \vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (11)$$

$r$  é a distância euclidiana entre o ponto fonte  $\vec{x}_i$  e ponto campo  $\vec{x}$ .

O contorno  $S$  é substituído por um número finito de elementos de contorno onde a variação espacial de  $\varphi$  e  $\phi$  é aproximada por funções que interpolam os valores de  $\varphi$  e  $\phi$  em pontos em cada elemento. Para o nosso caso, usamos uma aproximação quadrática para as funções e para a geométrica. A equação integral 9 é aplicada de forma discretizada a cada ponto  $\vec{x}_i$  do contorno e as integrais são calculadas sobre cada elemento e dependendo da facilidade podem ser usados métodos analíticos ou quadratura numérica. Isto gera um sistema de  $N$  equações algébricas com  $2N$  incógnitas que representam os valores de  $\varphi$  e  $\phi$  em pontos do contorno. Ao impor as condições de contorno usando valores conhecidos de  $\varphi$  e  $\phi$ , o número de incógnitas é reduzido a  $N$  e o sistema algébrico de equações lineares pode ser resolvido.

Alguns passos dentro da metodologia geral descrita acima devem ser cuidadosamente analisados. Esses passos incluem o cálculo de integrais singulares quando o ponto  $\vec{x}_i$  está situado dentro do elemento a ser integrado ou integral quase-singular quando o mesmo encontra-se a distâncias próximas e as singularidades que aparecem em cantos do domínio devido à divergência das condições de contorno. Neste trabalho, usaram-se os esquemas de Telles e Oliveira (1994) para o cálculo das integrais singulares e quase singulares e a técnica de discretização através do nó duplo em cantos. Mais detalhes da aplicabilidade destes e outros esquemas, podem ser encontradas em Azevedo (1991), Jaime (1995), Grilli e Svendsen (1990).

Conhecendo-se o potencial da velocidade em toda superfície livre, pode-se determinar a derivada tangencial do potencial de velocidade por diferenças finitas e juntamente com a derivada normal do mesmo potencial da velocidade calculada pelo método de elementos de contorno obtêm-se as velocidades (derivadas materiais da posição) nas direções  $x$  e  $y$  que permitem deslocar os nós dos elementos como partículas atualizando a geometria da superfície livre de um instante de tempo para o seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (12)$$

$$\frac{dz}{dt} = n_y \frac{\partial \phi}{\partial n} + n_x \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (13)$$

Onde  $n_x$  e  $n_y$  são as componentes do vetor normal unitário em cada ponto nodal na superfície livre.

A derivada material do potencial é determinada através da equação (3) e o método de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizado para atualizar o potencial nos nós entre tempos consecutivos usando derivadas materiais (Azevedo, 1991).

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de validar os procedimentos descritos, foi simulado o movimento não linear decorrente da geração de ondas em um tanque numérico semelhante ao descrito por Lin (1984) considerando: altura da água em repouso ( $h$ ) = 1m, comprimento do tanque ( $L$ ) = 8m, ( $\omega$ ) = 4,92 Hz, deslocamento máximo do pistão ( $2B$ ) = 0,1 m e passo do tempo  $\Delta t = 0,0063855$  s. Estes parâmetros correspondem ao problema adimensional de Lin (1984), o que permite obter comparação para a validação do modelo nas Figuras 2 e 3:

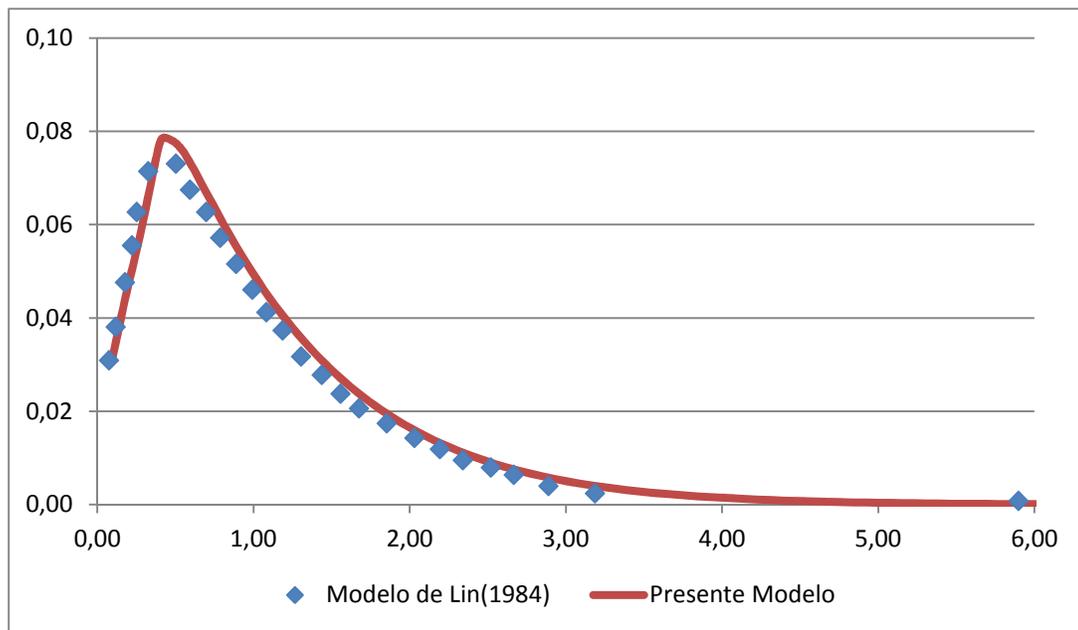


Figura 2 – Comparação da elevação da superfície livre no passo 100.

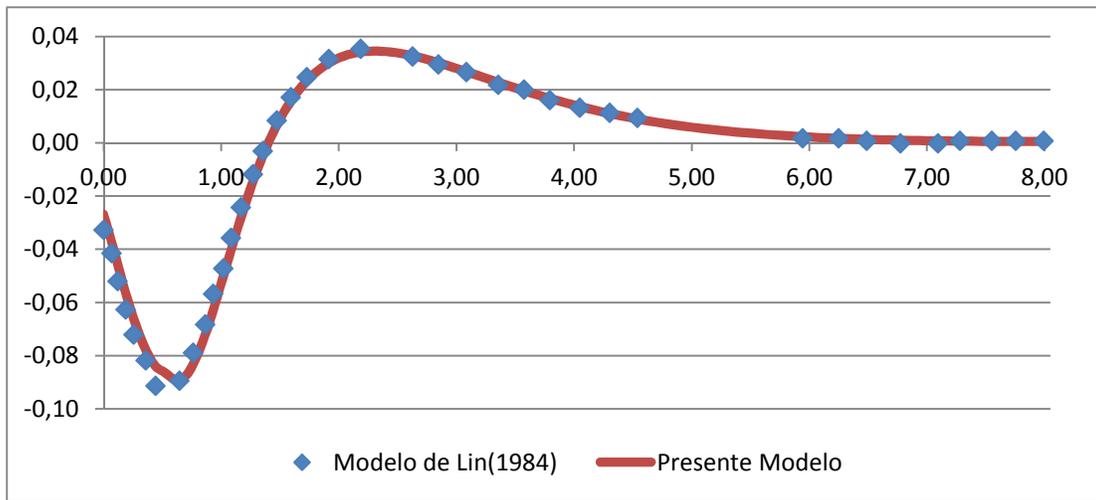


Figura 3 – Comparação da elevação da superfície livre no passo 200.

Após a validação do modelo, mostram-se os resultados da variação da superfície livre para o problema da interação não-linear de onda-corpo na figura 4.

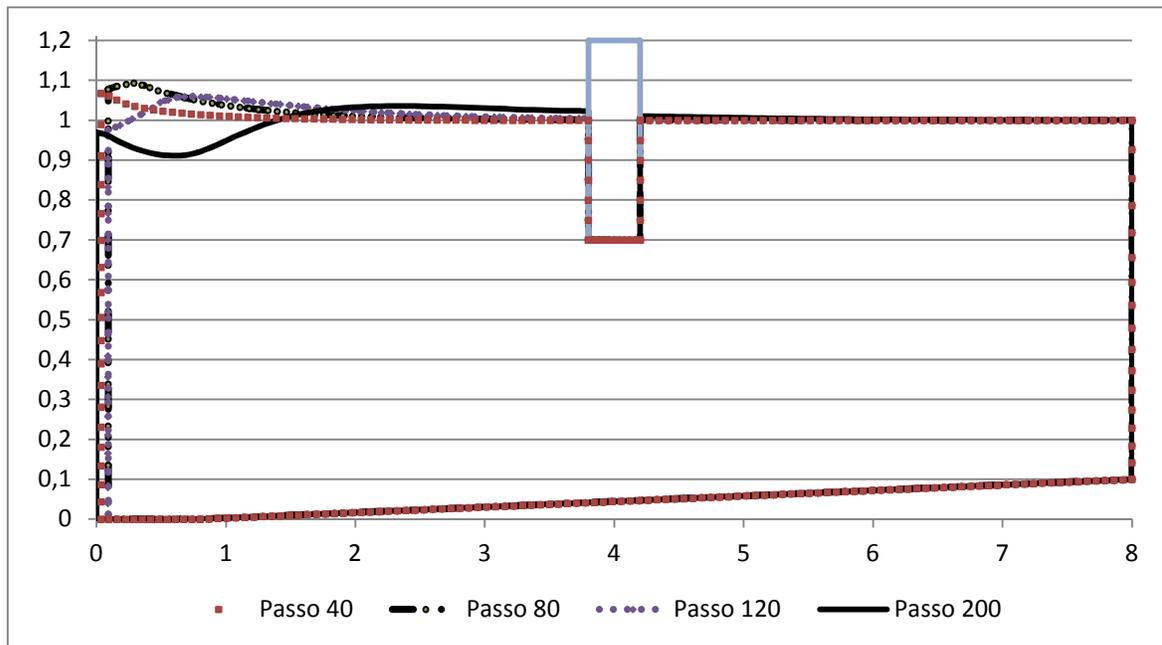


Figura 4 – Variação da superfície livre

Nas figuras 5 e 6 mostram-se os resultados da variação do volume e da energia mecânica, respectivamente. Na primeira, o volume deslocado devido ao movimento do pistão corresponde ao excesso de volume acima do nível de repouso dentro do tanque. Na segunda, observa-se a conservação de energia mecânica total após o estado de repouso do pistão, o que é coerente, uma vez que não mais energia é introduzida no sistema.

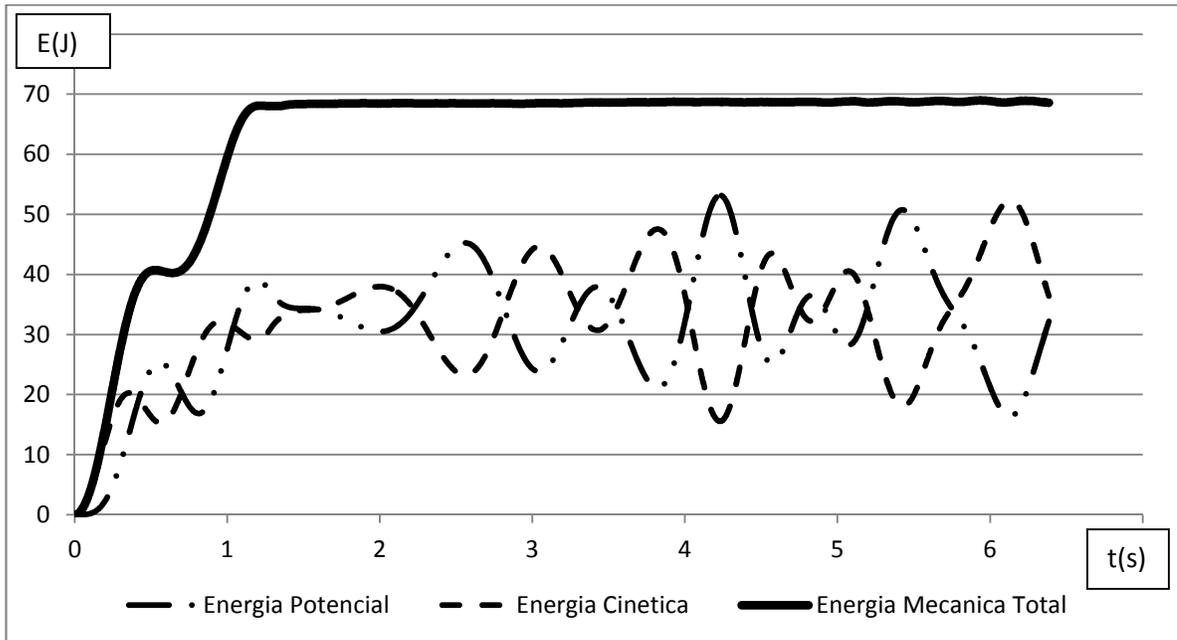


Figura 5 – variação das energias mecânicas

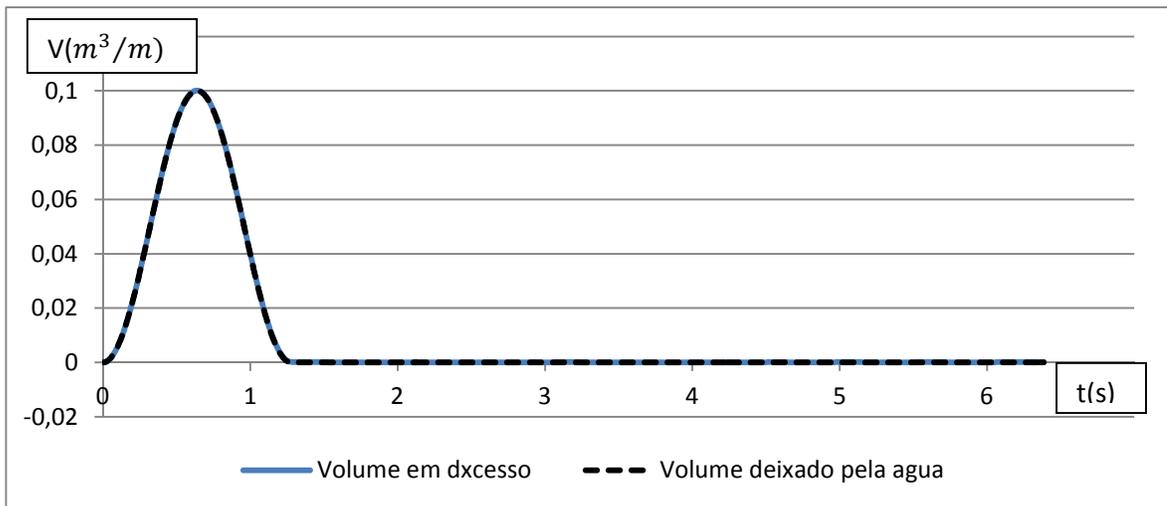


Figura 6 – variação de volume

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se a simulação numérica de um modelo bidimensional do problema de interação não linear de onda-corpo fixo com superfície imersa em uma região de profundidade variável. Usou-se a formulação mista Euleriana Lagrangeana com elementos de contorno isoparamétricos quadráticos e avanço no tempo pelo método de Runge-Kutta da quarta ordem a partir do trabalho de Azevedo (1991). O modelo apresentado foi capaz de reproduzir satisfatoriamente a variabilidade da superfície livre em toda extensão incluindo pontos em contato com o corpo. Na sequencia desta pesquisa incluiremos mecanismos de absorção das ondas com vista a evitar as reflexões devido aos

contornos rígidos e efetuaremos uma extensão para o cálculo do potencial da aceleração considerado importante para a determinação das forças que atuam no corpo devido à presença da onda.

## 6. REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, J. P. S.(1981). Application of the boundary element method to two-dimensional nonlinear gravity wave problems', PhD Thesis, Southampton University.
- CLÉMENT A.(1996). Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves. *Journal of Computational Physics*, No 126, pp. 139-151.
- DOLD, J. W.; PEREGRINE, D. H.(1984). An efficient boundary integral method for steep unsteady water waves. In *Proc. Of the 19th Coastal Engineering Conf. Houston, ASCE. Vol. 1*, pp. 955-967.
- DOMMERMUTH, D. G.; YUE, D. K. P.; LIN, W. M.; RAPP, R. J.; CHAN, E. S.; MELVILLE, W. K. (1987). Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments. *Journal of Fluid Mechanics. Vol. 189*, pp. 423-442.
- GRILLI, S. T.; HORRILLO, J.(1997). Numerical generation and absorption of fully nonlinear periodic waves. *Journal of Engineering Mechanics. Vol.123, No. 10*.
- GRILLI, S. T.; SKOURUP, J.; SVENDSEN, I. A.(1989). An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 6. No. 2*.
- GRILLI, S. T.; SVENDSEN, I. A.(1990). Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows. *Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 7, No. 4*.
- JAIME, P., R.(1995). Novas contribuições à simulação de ondas gravitacionais de grande amplitude pelo método de elementos de contorno. Dissertação de Mestrado COPPE-UFRJ, Engenharia Civil - Recursos Hídricos.
- KOO, W. C.; KIM, M. H.(2004). Freely floating-body simulation by a 2D fully nonlinear numerical wave tank. *Ocean Engineering. Vol. 31*, pp. 2011-2046.
- KOO, W. C.; KIM, M. H.(2007). Fully nonlinear wave-body interactions with surface-piercing bodies, *Ocean Engineering. Vol.34*, pp. 1000-1012.
- LIN, W.-M.(1984). Nonlinear motion of the free surface near a moving body. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- LONGUET-HOGGINS, M. S.; COKELET, E. D. (1976). The deformation of steep surface waves on water – I. A Numerical Method of Computation, *In Proc. R. Soc. Lond. A350*, 1-26.
- SUNG, H. G. and CHOI, H. S. (2010). Implicit formulation with the Boundary Element Method for NonLinear Radiation of Water Waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol.34. pp. 511-529*.
- TELLES, J. C. F.;OLIVEIRA, R. F. (1994). Third degree polynomial transformation for boundary elements. Vol. 13, pp. 135-141.
- URSELL, F. (1949). On the heaving motion of a circular cylinder on the surface of a fluid. *Quarter Journal Mechanics and Applied Mathematics. Vol II, part. 2*.
- VINGE, T.; BREVIG, P.(1981). Numerical simulation of breaking waves. *Advances Water Research. Vol. 4, pp. 77-82*.