

Simulação numérica de escoamento viscoso em duto retangular com superfície livre utilizando SPH e Diferenças Finitas

Arquimedes Almeida Júnior¹, Joel Roberto Guimarães Vasco² & Artur Vieira de Carvalho Costa³

Resumo: O escoamento viscoso transiente em dutos retangulares com superfície livre é governado pela equação de difusão de quantidade de movimento. Este trabalho apresenta a simulação numérica desse escoamento por dois métodos: o Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), método lagrangiano sem malha, e o Método de Diferenças Finitas (MDF), método euleriano baseado em malha. As simulações foram realizadas em domínio bidimensional com $Re = 100$, adotando a solução analítica de Fourier duplo com decaimento exponencial como referência de verificação. As condições de contorno são não-deslizamento nas paredes sólidas e gradiente nulo de velocidade na superfície livre; a integração temporal foi realizada pelo método de Euler explícito com critério de estabilidade de Von Neumann. O SPH apresentou suavização nos perfis de velocidade junto às fronteiras e desvio percentual de 1,62%, enquanto as MDF reproduziram o comportamento analítico com desvio percentual de 0,003%, diferença de aproximadamente três ordens de grandeza atribuída ao tratamento das condições de contorno. Para domínios fixos, as MDF mostram-se significativamente mais acuradas; o SPH, por sua vez, justifica-se em problemas com deformação ativa da interface, onde a abordagem lagrangiana é estruturalmente mais adequada.

Abstract: The transient viscous flow in rectangular ducts with free surface is governed by the momentum diffusion equation. This work presents the numerical simulation of such flow using two methods: the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), a meshfree Lagrangian method, and the Finite Difference Method (FDM), an Eulerian grid-based method. Both simulations were performed in a two-dimensional domain at $Re = 100$, using the double Fourier analytical solution with exponential decay as a verification reference. No-slip boundary conditions were applied at solid walls and zero velocity gradient at the free surface; temporal integration was performed by the explicit Euler method with Von Neumann stability criterion. The SPH exhibited smoothing in velocity profiles near boundaries, with percentage deviation of 1.62%, while FDM reproduced the analytical solution with percentage deviation of 0.003%, a difference of approximately three orders of magnitude attributed to boundary condition treatment. For fixed domains, FDM proves significantly more accurate; SPH, in turn, is better suited for problems with active interface deformation, where the Lagrangian approach is structurally advantageous.

Palavras-Chave: Escoamento com superfície livre; SPH; Diferenças Finitas.

Keywords: Free surface flow; SPH; Finite Differences.

INTRODUÇÃO

O escoamento em dutos retangulares abertos, com superfície livre, ocorre em diversas aplicações de engenharia hidráulica. Conforme Yu et al. (2023), dutos retangulares abertos são encontrados em engenharia civil e hidráulica em aplicações como transporte de sedimentos em rios e canais artificiais, sistemas de esgotamento sanitário e drenagem urbana. O comportamento transiente desses escoamentos – decorrente de perturbações como abertura de comportas, variações de vazão ou eventos de cheia – condiciona a resposta hidráulica do sistema e o dimensionamento das estruturas (Chaudhry, 2014).

1) Universidade Federal de Goiás (UFG) - Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) - arquimedes@discente.ufg.br

2) Universidade Federal de Goiás (UFG) - Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) - joelvasco@ufg.br

3) Universidade Federal de Goiás (UFG) - Escola de Engenharia Civil e Ambiental (EECA) - arturcosta@discente.ufg.br

Os métodos numéricos baseados em malha, como o Método de Diferenças Finitas (MDF), são empregados na solução de equações diferenciais parciais em domínios regulares. Esses métodos discretizam o domínio em uma grade fixa e aproximam os operadores diferenciais por expansões em série de Taylor. A presença de superfícies livres com geometria variável introduz dificuldades à abordagem euleriana, exigindo técnicas adicionais de rastreamento da interface (Ferziger et al., 2020). O Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) é um método lagrangiano sem malha no qual o domínio é discretizado por partículas que se movem com o fluido, incorporando a evolução da superfície livre sem rastreamento explícito (Monaghan, 2005).

Apesar dos avanços, o SPH ainda pode ser considerado um método relativamente recente e apresenta desvantagens em relação aos esquemas eulerianos clássicos baseados em malha, como a ausência de provas completas de convergência, a falta de padronização de técnicas e a dependência de parâmetros de simulação (Vacondio et al., 2021). Contudo, o SPH é adequado para escoamentos com grandes deformações de interface e geometrias complexas em movimento, situações em que métodos em malha enfrentam dificuldades estruturais, enquanto para domínios com fronteiras fixas o MDF tende a ser mais preciso nas condições de contorno e computacionalmente menos custoso (Vacondio et al., 2021).

O SPH foi desenvolvido para astrofísica (Lucy, 1977; Gingold e Monaghan, 1977) e aplicado a escoamentos com superfície livre, rupturas de barragem e canais; Monteleone et al. (2019) validaram o método para escoamento laminar em canal aberto bidimensional com número de Reynolds (Re) da ordem de 10^2 , configuração próxima à adotada neste trabalho. A formulação CSPM (*Corrective Smoothed Particle Method*) desenvolvida por Chen et al. (1999) corrige deficiências da formulação clássica, contudo a imposição de condições de contorno permanece não trivial e sem consenso (Vacondio et al., 2021): partículas fantasma com reflexão antisimétrica, embora amplamente utilizadas, não garantem consistência de primeira ordem na região de fronteira, afetando localmente a taxa de convergência (Negi e Ramachandran, 2022).

Neste trabalho, simula-se o escoamento viscoso transiente em um duto retangular bidimensional com superfície livre pelos dois métodos, comparando os resultados entre si e com a solução analítica de Fourier duplo com decaimento exponencial. O número de Reynolds adotado ($Re = 100$) corresponde ao regime laminar viscoso e permite derivar a viscosidade cinemática analiticamente a partir dos parâmetros geométricos, configurando um caso de verificação numérica controlada com solução de referência exata. O objetivo é avaliar a acurácia e o comportamento temporal de cada abordagem para esse problema, com ênfase no efeito das condições de contorno sobre o desvio global.

MÉTODOS

Modelo físico

A configuração simulada consiste no escoamento viscoso laminar de um fluido newtoniano, inicialmente em repouso, em um duto retangular de seção transversal $W \times H$, parcialmente preenchido até uma altura líquida h_{liq} . O duto é inclinado a ângulo θ em relação à horizontal, de modo que a componente axial da gravidade atua como força motriz do escoamento. A superfície livre é tratada como fixa e horizontal, o que equivale a considerar que a deformação da interface é desprezível em relação à escala do escoamento axial. A viscosidade cinemática ν é obtida da definição do número de Reynolds: $\nu = (g \cdot \sin \theta \cdot h^3 / 4Re)^{1/2}$. Os valores adotados são $W = H = 0,5$ m, $h = 0,35$ m, $\theta = 5^\circ$, $Re = 100$ e $\rho = 1005$ kg/m³. O sistema parte do repouso e evolui até atingir o regime permanente.

Modelo matemático

Sob as hipóteses de escoamento laminar, bidimensional e incompressível, com velocidade axial $u(x, y, t)$ uniforme ao longo do eixo do duto, a equação de quantidade de movimento reduz-se à equação de difusão com termo fonte, dada pela Equação (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta, \quad (1)$$

em que ν é a viscosidade cinemática e $g \sin \theta$ é a força de corpo axial por unidade de massa. As coordenadas x e y são transversais ao eixo do escoamento, correspondendo à largura e à altura do duto, respectivamente. As condições de contorno são: (i) condição de não-deslizamento nas paredes sólidas, $u = 0$ em $x = 0$, $x = W$ e $y = 0$ (Dirichlet homogêneo); e (ii) gradiente nulo de velocidade na superfície livre, $\partial u / \partial y = 0$ em $y = h_{liq}$ (Neumann homogêneo), que corresponde à ausência de tensão de cisalhamento na interface fluido-ar. A condição inicial é $u(x, y, 0) = 0$ em todo o domínio.

A solução analítica transiente do problema de valor inicial e de contorno definido pela Equação (1) é obtida por separação de variáveis com dupla série de Fourier. Considerando as condições de contorno de Dirichlet nas paredes e de Neumann na superfície livre, as funções próprias do problema são $\sin(\alpha_m \cdot x) \cdot \sin(\beta_n \cdot y)$, com $\alpha_m = (2m-1)\pi/W$ e $\beta_n = (2n-1)\pi/(2h_{liq})$, resultando na Equação (2).

$$u(x, y, t) = \int_{m,n}^{\infty} C_{mn} (1 - e^{-\nu \lambda_{mn} t}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2)$$

em que $C_{mn} = 16(g \cdot \sin \theta / \nu) / [\pi^2 (2m-1)(2n-1) \cdot \lambda_{mn}]$ e $\lambda_{mn} = \alpha_m^2 + \beta_n^2$ é o autovalor associado ao modo (m, n) . O somatório foi truncado em 50 termos em cada direção, suficiente para convergência com erro inferior a 10^{-6} para os parâmetros adotados. Esta solução serve como referência de verificação para ambos os métodos numéricos. A métrica de comparação é o desvio percentual entre o campo numérico e o analítico nos pontos interiores do domínio no instante final da simulação.

Modelos numéricos

Ambos os métodos utilizam o mesmo espaçamento $dp = W/99 \approx 5 \times 10^{-3}$ m e a mesma integração temporal por Euler explícito, com passos de tempo determinados por critérios de estabilidade de Von Neumann específicos de cada método. A simulação é encerrada quando a variação relativa de u entre passos consecutivos é inferior a 10^{-6} , caracterizando o regime permanente. Os instantes de análise são $t/t_{dif} = 0,05; 0,25; 0,50$ e $1,0$, onde $t_{dif} = h_{liq}^2/\nu$ é a escala de tempo difusiva do problema.

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

No SPH, o domínio é representado por N partículas com posições $\{x_i\}$. A aproximação de uma função $f(x)$ e sua derivada é obtida pela convolução com um kernel de suavização $W(x - x', h)$ (Liu e Liu, 2003). Na formulação CSPM, que corrige a consistência do método clássico por meio de um tensor de renormalização L , a derivada espacial de f para a partícula i é aproximada pela Equação (3).

$$f_{i,x} = \frac{\int_{j=1}^N (f_j - f_i) W_{ij,x} m_j / \rho_j}{\int_{j=1}^N (x_j - x_i) W_{ij,x} m_j / \rho_j} \quad (3)$$

em que $W_{ij} = W(x_j - x_i, h)$ é o valor do kernel entre as partículas i e j , $W_{ij,x}$ é sua derivada espacial, m_j é a massa e ρ_j é a densidade da partícula j . O kernel adotado é o B-spline cúbico 2D. O Laplaciano da Equação (1) é obtido pela aplicação dupla da Equação (3). As condições de contorno são implementadas por partículas fantasma: antisimétricas para as paredes (no-slip) e simétricas para a superfície livre ($\partial u / \partial n = 0$). O comprimento de suavização adotado é $h = 2dp$, razão que garante ~50–80 vizinhos por partícula e suporte adequado do kernel. O critério de estabilidade temporal é calculado diretamente dos coeficientes SPH: $\Delta t < 0,45 / (v \cdot \max |\Sigma_j F_{ij}|)$.

Método Diferenças Finitas (MDF)

No Método de Diferenças Finitas, o domínio é discretizado em uma malha cartesiana uniforme com $n_x = 100$ nós em x e n_y nós em y , cobrindo o domínio $[0, W] \times [0, h_{liq}]$. O Laplaciano da Equação (1) é aproximado por diferenças centrais de segunda ordem, conforme a Equação (4).

$$u^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} + \Delta t \left(v \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) + g \sin \theta \right) \quad (4)$$

A condição de Dirichlet ($u = 0$) é imposta diretamente nos nós das paredes, sem interpolação. A condição de Neumann na superfície livre ($\partial u / \partial y = 0$) é implementada por uma linha fantasma: $u(n_y+1, i) = u(n_y-1, i)$. O critério de estabilidade de Von Neumann é: $\Delta t < \Delta x^2 \Delta y^2 / [2v(\Delta x^2 + \Delta y^2)]$, com fator de segurança 0,45.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os parâmetros utilizados nas simulações foram: $\rho = 1005 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\theta = 5^\circ$, $Re = 100$, $W = H = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,35 \text{ m}$ e $dp = W/99 \approx 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, comum a ambos os métodos. A Figura 1 apresenta os resultados das MDF: o painel (a) mostra a evolução temporal do perfil de velocidade na seção central ($x = W/2$) para os instantes $t/t_{dif} = 0,05; 0,25; 0,50$ e $1,0$, comparados com o perfil analítico nos mesmos instantes (linhas tracejadas) e com o regime permanente analítico (linha preta); o painel (b) apresenta o perfil vertical final comparado à solução analítica. As MDF reproduzem os perfis com sobreposição praticamente perfeita à solução analítica em todos os instantes, com desvio percentual de 0,003%.

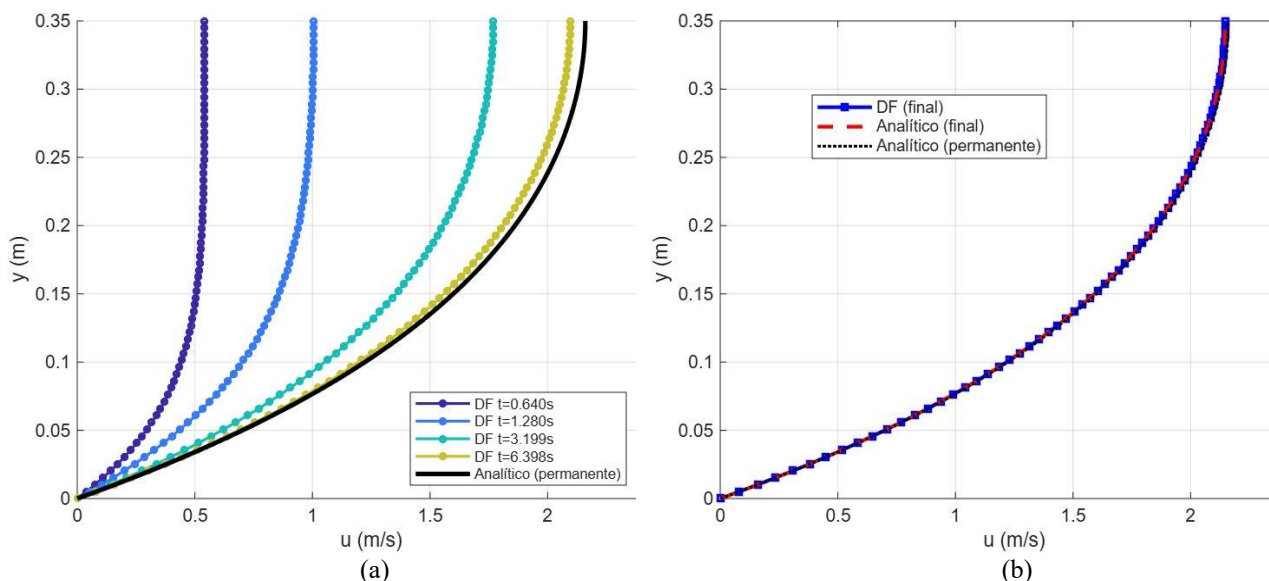


Figura 1 – MDF, $Re = 100$: (a) evolução temporal em $x = W/2$; (b) perfil vertical final (desvio = 0,003%).

A Figura 2 apresenta os resultados do SPH no mesmo formato: painel (a) com a evolução temporal e painel (b) com o perfil final. O SPH também reproduz a evolução temporal de forma coerente com a solução analítica, convergindo para o regime permanente em todos os instantes avaliados. Contudo, o painel (b) evidencia uma leve suavização do perfil nas regiões próximas às fronteiras (paredes e superfície livre) ausente nos resultados do MDF, com desvio percentual de 1,62%.

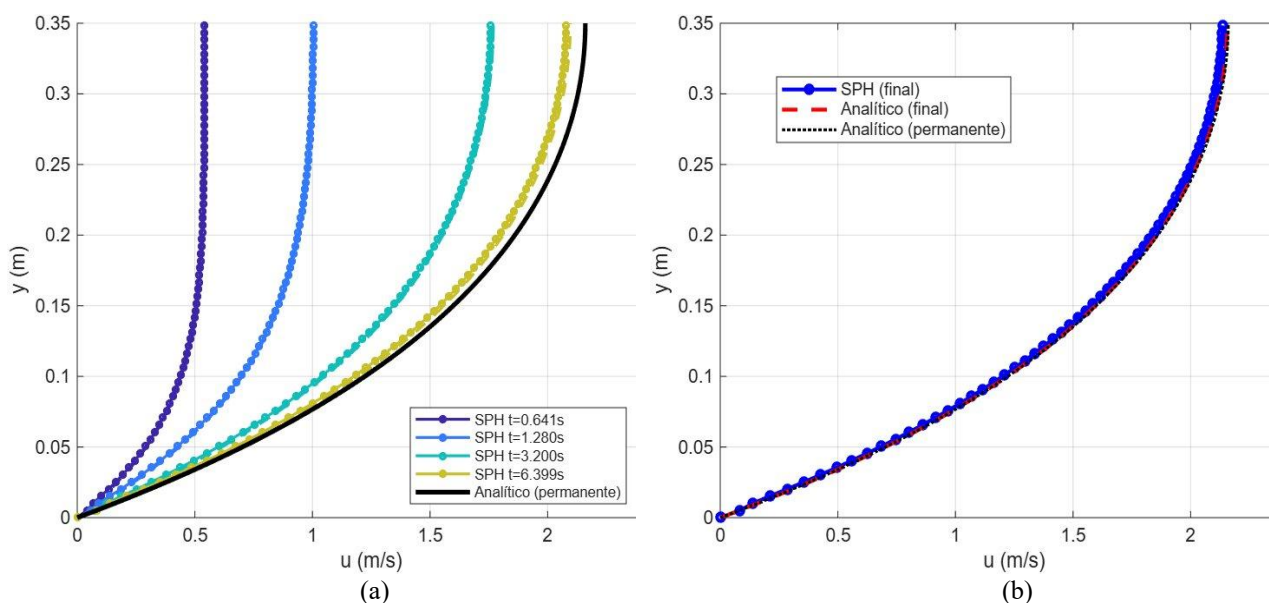


Figura 2 – SPH, $Re = 100$: (a) evolução temporal em $x = W/2$; (b) perfil vertical final (desvio = 1,62%).

Comparando os dois métodos, ambos convergem para o regime permanente de forma consistente com a solução analítica. A diferença é quantitativa: o MDF apresenta desvio três ordens de grandeza menor que o SPH, reflexo direto do tratamento das condições de contorno, imposição

direta de Dirichlet nos nós de fronteira no MDF contra partículas fantasma com consistência C1 limitada no SPH.

A Figura 3(a) apresenta o mapa da distribuição espacial do erro local $|u_{\text{SPH}} - u_{\text{analítico}}|$ no instante final da simulação SPH, complementando a análise do painel (b) da Figura 2. O erro não é uniformemente distribuído: concentra-se nas regiões de fronteira, paredes laterais ($x = 0$ e $x = W$), fundo ($y = 0$) e, de forma mais intensa, na superfície livre ($y = h_{\text{liq}}$). Esse padrão é coerente com a perda de suporte completo do kernel nas regiões de fronteira. O erro mais intenso na superfície livre em relação às paredes laterais é coerente com o uso de reflexão simétrica nas partículas fantasma da superfície livre, que não garante consistência C1. O campo de erro é simétrico em relação à linha $x = W/2$, como esperado pela simetria do problema físico, confirmando que o SPH preserva a simetria do escoamento apesar do erro nas bordas.

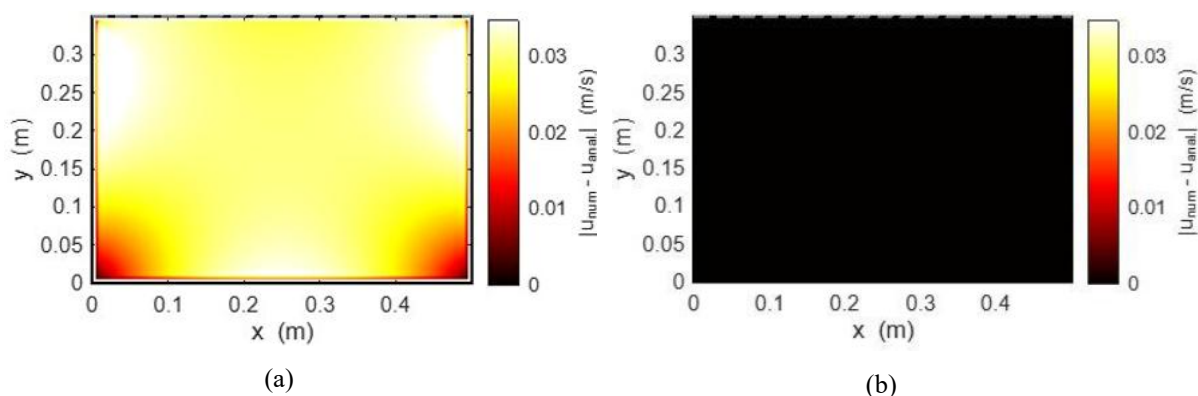


Figura 3 – Distribuição do erro local no domínio | $Re = 100$: (a) SPH, desvio = 1,62%; (b) MDF, desvio = 0,003%.

A Figura 3(b), na mesma escala de cor, mostra o campo de erro do MDF praticamente uniforme e mínimo em todo o domínio, sem a concentração de fronteira observada no SPH, reflexo da imposição direta de Dirichlet nos nós das paredes. A diferença de desvio percentual entre os dois métodos de aproximadamente três ordens de grandeza decorre do tratamento das condições de contorno. O MDF impõe a condição de Dirichlet diretamente no nó da parede, sem interpolação, preservando a precisão de segunda ordem em todo o domínio interior. O SPH utiliza partículas fantasma com reflexão antissimétrica que não garantem a consistência de primeira ordem da aproximação kernel nas regiões próximas à fronteira (Negi e Ramachandran, 2022).

O tratamento de condições de contorno sólidas constitui um desafio reconhecido da comunidade científica (Vacondio et al., 2021). Em termos de custo computacional, o SPH demandou 728 s contra 108 s das MDF (razão 6,7): o Δt $3\times$ maior e $2,5\times$ menos passos não compensam o custo por passo $\sim 17\times$ superior (~ 50 - 80 vizinhos por partícula vs. 4 nos nós das MDF), conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Comparativo de custo computacional: SPH vs. MDF ($dp \approx 5 \times 10^{-3}$ m, $Re = 100$).

Parâmetro	SPH	MDF
Δt (s)	$9,01 \times 10^{-4}$	$3,01 \times 10^{-4}$
Passos até permanente	12.283	30.667
Tempo total (s)	728,1	108,3
Passos/segundo	16,9	283,2
Desvio percentual (%)	1,62	0,003

Avaliou-se a sensibilidade do SPH ao refinamento espacial e ao comprimento de suavização, com os demais parâmetros fixos (Tabela 2). Refinando o espaçamento de $W/49$ a $W/199$ com $h/dp = 2,0$, o desvio cai de 2,7% para 0,9% (1,6% na resolução adotada, $W/99$), o que corresponde a uma ordem de convergência observada de aproximadamente 0,8 – inferior à segunda ordem esperada para o MDF, coerente com a perda de consistência C1 junto às fronteiras. Fixado $dp = W/99$, o desvio é mínimo em torno de $h/dp \approx 2,5$ (0,6%) e cresce tanto para razões menores, por suporte insuficiente do kernel, quanto para razões maiores (3,0% em $h/dp = 3,0$), em que o alargamento do suporte amplia a banda de fronteira com consistência reduzida. A razão adotada ($h/dp = 2,0$) situa-se no ramo estável da curva, próxima ao ótimo.

Tabela 2 – Sensibilidade do SPH ($Re = 100$): (a) refinamento espacial, $h/dp = 2,0$; (b) comprimento de suavização, $dp = W/99$ (em destaque, a configuração adotada).

(a) dp (h/dp = 2,0)	W/49		W/99		W/199			
Desvio (%)	2,7		1,6		0,9			
(b) h/dp (dp = W/99)	1,5		2,0		2,5		3,0	
Desvio (%)	2,7		1,6		0,6		3,0	

A superfície livre estática adotada representa uma simplificação intencional; a extensão para deformação dinâmica – ressalto hidráulico, ruptura de barragem – constitui o próximo passo natural, no qual a ausência de rastreamento explícito de interface é a principal vantagem estrutural do SPH frente ao MDF.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, simulou-se o escoamento viscoso transiente em um duto retangular 2D com superfície livre pelo SPH e por Diferenças Finitas, comparando os resultados com a solução analítica de Fourier duplo. Ambos os métodos reproduziram a evolução temporal do campo de velocidade de forma coerente com a solução analítica, com diferentes níveis de acurácia: desvio percentual de 1,62% para o SPH e 0,003% para as MDF, uma diferença de aproximadamente três ordens de grandeza.

O SPH apresentou perfis de velocidade mais suaves nas proximidades das fronteiras, em decorrência da perda de consistência C1 da aproximação kernel na região de fronteira quando partículas fantasma são utilizadas. As MDF apresentaram menor desvio global, em função da

regularidade da malha cartesiana e da imposição direta da condição de Dirichlet nos nós de fronteira. A principal diferença estrutural entre os métodos está no tratamento da superfície livre: no SPH, a interface é incorporada naturalmente pela distribuição de partículas, sem rastreamento explícito; nas MDF, a posição da superfície deve ser conhecida a priori para impor a condição de Neumann. Para o domínio fixo simulado neste trabalho, essa diferença não representa vantagem prática do SPH. No entanto, o SPH é preciso e eficiente no tratamento de fronteiras móveis e interfaces complexas, situações geralmente abordadas com dificuldade por métodos convencionais como o MDF. Essa vantagem se torna relevante em problemas com deformação ativa da interface, como ressalto hidráulico e ruptura de barragem, nos quais a abordagem lagrangiana é estruturalmente mais adequada. Como perspectivas futuras, destacam-se a validação experimental em canal instrumentado e a extensão a interfaces com deformação dinâmica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro por meio de bolsa de pesquisa e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental e Sanitária (PPGEAS) da Universidade Federal de Goiás (UFG) pelo suporte institucional.

REFERÊNCIAS

- CHAUDHRY, M. H. (2014). Applied Hydraulic Transients. Van Nostrand Reinhold, New York.
- CHEN, J. K.; BERAUN, J. E.; CARNEY, T. C. (1999). A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. Int. J. Numer. Meth. Eng., 46: 231–252.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M.; STREET, R. L. (2020). Computational Methods for Fluid Dynamics. 4. ed. Springer, Cham.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. Mon. Not. R. Astron. Soc., 181: 375–389.
- LIU, G. R.; LIU, M. B. (2003). Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. World Scientific, Singapura.
- LUCY, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal, 82(12): 1013–1024.
- MONAGHAN, J. J. (2005). Smoothed Particle Hydrodynamics. Reports on Progress in Physics, 68: 1703–1759.
- MONTELEONE, A.; BORINO, G.; NAPOLI, E. (2019). Simulating free-surface channel flows through SPH. Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. B1 (Hydraulic Engineering).
- NEGI, P.; RAMACHANDRAN, P. (2022). How to train your solver: Verification of boundary conditions for smoothed particle hydrodynamics. Physics of Fluids, 34: 117125.
- YU, M.; MODESTI, D.; PIROZZOLI, S. (2023). Direct numerical simulation of flow in open rectangular ducts. Journal of Fluid Mechanics, 977: A32.
- VACONDIO, R. et al. (2021). Grand challenges for Smoothed Particle Hydrodynamics numerical schemes. Computational Particle Mechanics, 8: 575–588.