

Energia de Rotação no Ressalto Hidráulico: Um modelo analítico para estimativa da dissipação por recirculação

Múcio Ribeiro¹, Edna Viana² & Jorge Tarqui³

Resumo: Este trabalho propõe um modelo analítico simplificado para estimar a energia cinética associada à região de recirculação do ressalto hidráulico, representando-a como um vórtice forçado em rotação rígida. A formulação desenvolvida permite calcular a energia rotacional da estrutura coerente de recirculação e compará-la com a perda de energia prevista pela equação de Bélanger. Os resultados indicam que a energia estimada pelo modelo apresenta a mesma ordem de grandeza da energia dissipada no ressalto, correspondendo a aproximadamente 25% a 100% da perda de energia, dependendo da correlação adotada para o comprimento do rolo e da concentração média de ar considerada. Esses resultados sugerem que a estrutura coerente de recirculação representa uma parcela significativa da energia envolvida no ressalto hidráulico, embora outros mecanismos hidrodinâmicos também contribuam para a dissipação total. As limitações decorrentes da hipótese de rotação rígida são discutidas, bem como as perspectivas de aperfeiçoamento do modelo por meio da utilização de campos de velocidade obtidos por técnicas ópticas, como Optical Flow.

Abstract: This study proposes a simplified analytical model to estimate the kinetic energy associated with the recirculation region of a hydraulic jump, representing it as a forced vortex in rigid-body rotation. The developed formulation allows for the calculation of the rotational energy of the coherent recirculation structure and its comparison with the energy loss predicted by the Bélanger equation. The results indicate that the energy estimated by the model is of the same order of magnitude as the energy dissipated in the jump, accounting for approximately 25% to 100% of the energy loss, depending on the correlation adopted for the roller length and the assumed average air concentration. These results suggest that the coherent recirculation structure represents a significant portion of the energy involved in the hydraulic jump, although other hydrodynamic mechanisms also contribute to the total dissipation.

Palavras-Chave: Ressalto hidráulico; energia de rotação; dissipação de energia.

Keywords: Hydraulic jump; rotational energy; energy dissipation.

1) Universidade Federal de Minas Gerais (mecn_mucio@hotmail.com)

2) Universidade Federal de Minas Gerais (ednamfv@ufmg.br)

3) Universidade Federal de Minas Gerais (jlztarqui@yahoo.com.br)

INTRODUÇÃO

O ressalto hidráulico é um fenômeno clássico de transição de escoamento supercrítico para subcrítico, acompanhado de intensa dissipação de energia. A perda de carga total é bem descrita pela equação de Bélanger (1820) (Equação 1), que relaciona as profundidades conjugadas e o número de Froude a montante Fr_1 . No entanto, os mecanismos físicos pelos quais a energia cinética é dissipada permanecem em debate, especialmente no que diz respeito ao papel da região de recirculação (rolo) que se forma na superfície do ressalto. As variáveis envolvidas no ressalto hidráulico são apresentadas na Figura 1.

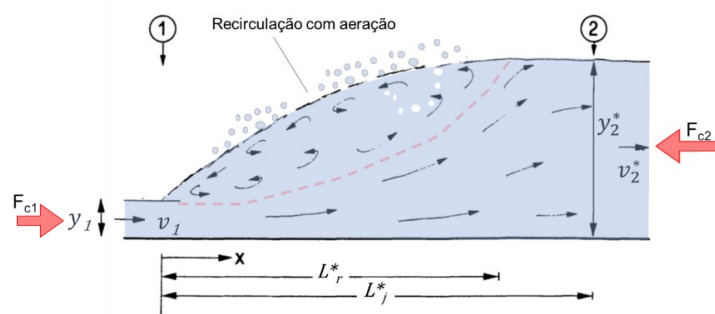


Figura 1 - Variáveis envolvidas em um ressalto hidráulico. Fonte - Adaptado de Hager (1992).

No esquema da Figura 1:

- $F_{c,1}$ e $F_{c,2}$ representam as forças do escoamento que atuam nas seções 1 e 2;
- v_1 e v_2^* representam as velocidades nas seções 1 e 2;
- y_1 e y_2^* representam as profundidades de água nas seções 1 e 2;
- L_j^* representa o comprimento do ressalto até atingir-se a elevação y_2^* ; e
- L_r^* representa o comprimento da região com recirculação de água, ou o rolo do ressalto.

Definidos por:

$$\frac{y_1}{y_2^*} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1 \right) \quad (1)$$

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{y_1 \cdot g}} \quad Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{y_2 \cdot g}} \quad (2)$$

$$E_1 = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} \quad E_2 = y_2^* + \frac{v_2^{*2}}{2g} \quad (3)$$

Em que:

- Fr_1 e Fr_2 representam os números de Froude nas seções 1 e 2; e
- E_1 e E_2 representam as energias específicas do escoamento nas seções 1 e 2.

Diversos autores sugerem que estruturas coerentes de recirculação transportam ou concentram temporariamente parcela da energia cinética organizada do escoamento na forma de rotação (HAGER *et al.*, 2020; CHANSON, 1996; WANG & CHANSON, 2015). Uma hipótese intuitiva é que, se o rolo se comportasse como um corpo rígido em rotação uniforme, a energia cinética de rotação associada ao rolo seria da mesma ordem de grandeza da perda de carga medida entre as seções conjugadas.

Este estudo testa essa hipótese por meio de um modelo simplificado de rotação rígida, comparando a energia de rotação estimada com a perda de carga real, obtida pelas relações obtidas a partir da Equação de Bélanger (1).

REVISÃO DA LITERATURA

A teoria de Kolmogorov (1941, 1962) estabelece que, em escoamentos turbulentos a altos números de Reynolds, a energia é injetada nas escalas macroscópicas (estruturas coerentes) e transferida sucessivamente para escalas menores por um processo invíscido, até ser dissipada por efeitos viscosos nas escalas de Kolmogorov, ilustrada na Figura 2. No ressalto hidráulico, a região de recirculação (rolo) constitui uma dessas estruturas coerentes de grande escala, onde parte significativa da energia cinética a montante é temporariamente “transportada” na forma de rotação organizada. A energia cinética associada às grandes estruturas coerentes não é dissipada diretamente, sendo continuamente transferida para escalas menores da turbulência até alcançar as escalas viscosas. Essa visão motiva a hipótese central do presente trabalho.

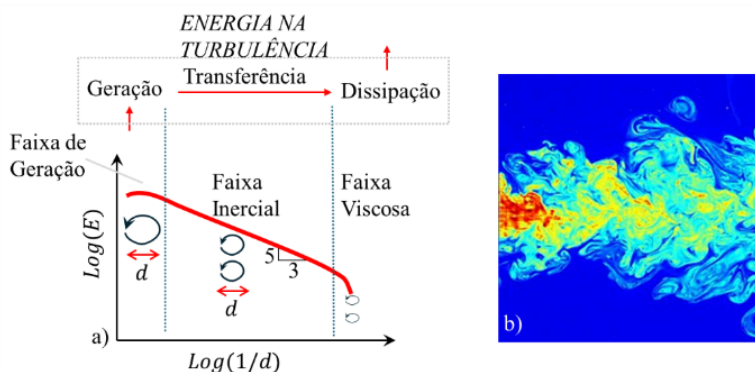


Figura 2 - a) Relação entre a energia E nos vórtices de turbulência e o diâmetro da estrutura d , com as faixas de geração, transferência e dissipação de energia entre as estruturas de um escoamento turbulento, segundo Kolmogorov (1941); b) estruturas de vórtices turbulentos em um escoamento com múltiplos diâmetros. Fonte: a) Elaborado pelos autores; b) Thomas (2021).

Embora a perda de energia total entre as seções 1 e 2 seja bem determinada pela equação de Bélanger (Equação 1), os mecanismos físicos dessa dissipação ainda são objeto de debate. Uma evidência indireta da importância da recirculação reside na diversidade de correlações empíricas propostas para o comprimento do ressalto (L_j^*) e do rolo (L_r^*), conforme compilado na Figura 3. Diferentes autores, utilizando aparatos e faixas de número de Froude distintos, obtiveram relações que não colapsam em uma única curva. Adicionalmente, a introdução de obstáculos e blocos dissipadores altera significativamente essas relações, e os resultados nem sempre são reproduzíveis (FRIZELL e SVOBODA, 2012). Essa falta de universalidade sugere que o comprimento do ressalto não é função apenas de Fr_1 , mas também de parâmetros que afetam a capacidade de sustentação da recirculação – ou seja, a energia de rotação.

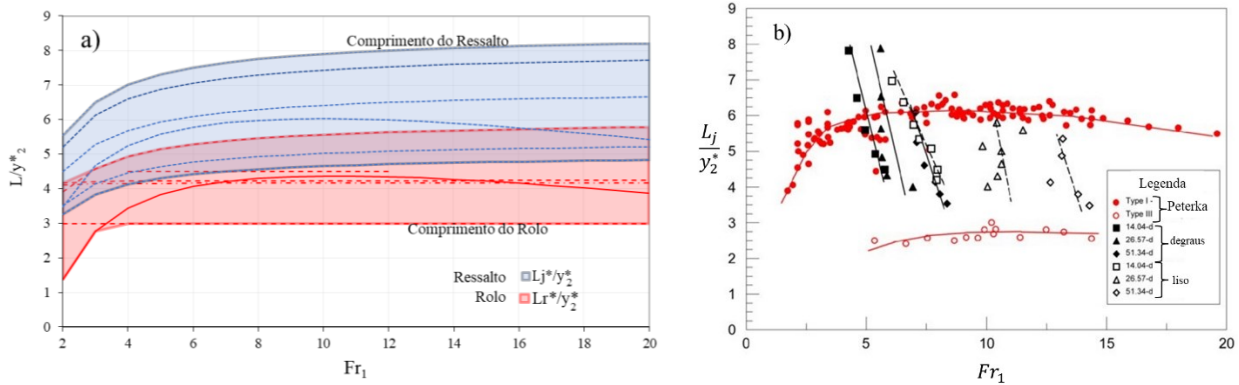


Figura 3 - a) Relação entre o comprimento do ressalto L_j^* , o comprimento do rolo de recirculação L_r^* e o número de Froude da Seção 1 para vários autores. b) Resultados de testes conduzidos por Frizell e Svoboda (2012) que mostram a não concordância do comprimento do ressalto para bacias do tipo III propostas por Peterka (1964) com base na variação do ângulo de entrada e da presença ou não de degraus. Fontes: a) compilação de dados apresentada por Ribeiro (2023) b). Adaptado de Frizell e Svoboda (2012).

Uma tentativa sistemática de unificar as correlações geométricas do ressalto foi apresentada por Schulz *et al* (2015). Empregando análise dimensional e o conceito de auto-similaridade incompleta, os autores derivaram relações adimensionais para a altura sequente (y_2^*/y_1), o comprimento do rolo (L_r^*/y_1) e o comprimento total do ressalto (L_j^*/y_1), calibrando-as com dados experimentais de múltiplas fontes. Seu importante trabalho representa um avanço no pré-dimensionamento de bacias de dissipação, fornecendo equações de ampla aplicabilidade. No entanto, como os próprios autores reconhecem, as calibrações incorporam desvios significativos entre diferentes conjuntos de dados, sem que se possa atribuir essas diferenças a causas físicas específicas (rugosidade do fundo, escala do modelo, grau de aeração).

HIPÓTESE FÍSICA E MODELO SIMPLIFICADO

Uma hipótese intuitiva é que, se o rolo se comportasse como um corpo rígido em rotação uniforme, a energia cinética de rotação (E_{rot}) associada ao movimento organizado da recirculação seria da mesma ordem de grandeza da perda de carga do ressalto $\Delta E = E_1 - E_2$. Logo, foi desenvolvido um modelo de cálculo para a Energia de Rotação baseado nas características do ressalto e foi feita a análise da Perda de Energia pela Equação (3).

Hipótese Investigada

Para testar tal hipótese, adotou-se um modelo geométrico simplificado. A Figura 4 ilustra a interpretação do rolo do ressalto como uma elipse em rotação rígida no entorno do centro de rotação não coincidente com o centroide.

Assume-se para a elipse, nesse modelo conceitual que:

$$a = \frac{L_r^*}{2} \quad b = \frac{y_2^* - y_1}{2}$$

- O rolo é aproximado por uma elipse de semi-eixos horizontais $a = \frac{L_r^*}{2}$ e vertical $b = \frac{y_2^* - y_1}{2}$, onde L_r^* é o comprimento do rolo e y_1 , y_2^* as profundidades conjugadas. Assumiu-se que $\cos\theta \sim 1$;

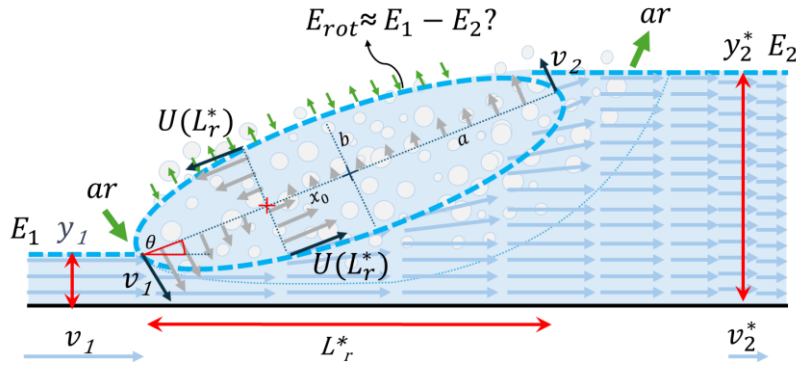


Figura 4 – Interpretação do rolo do resalto como um campo elíptico de velocidades, inclinado em um ângulo θ entre as seções 1 e 2. Fonte: elaborado pelos autores.

- A elipse gira como um vórtice forçado (velocidade tangencial proporcional à distância ao centro de rotação), com velocidade máxima na fronteira da elipse, dada por $U = v_1$ na extremidade de montante do rolo e $U = v_2^*$ na extremidade de jusante do rolo;
- Há uma excentricidade do ponto de rotação em relação à elipse de dimensão x_0 , que pode ser obtida assumindo-se a conservação da vazão em recirculação dentro da elipse em $v_1 \cdot (a - x_0) = v_2^* \cdot (a + x_0)$, resultando na expressão:

$$x_0 = a \frac{v_1 - v_2^*}{v_1 + v_2^*} \quad (4)$$

A energia cinética de rotação de uma elipse pode ser dada por:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5)$$

Em que:

- I representa o momento de inércia polar da elipse de massa M . Como o eixo é excêntrico, deve-se usar o teorema dos eixos paralelos, calculando o momento de inércia baseado no centroide da forma I_{cent} como apresentado em:

$$I = I_{cent} + M x_0^2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{4} + M x_0^2 \quad (6)$$

- ω representa a velocidade angular média, que pode ser obtida por:

$$\omega = \frac{v_1 - v_2^*}{2a} \quad (7)$$

Para uma elipse homogênea de massa $M = \rho B(\pi ab)$, sendo ρ a densidade do fluido em rotação rígida e B a largura do canal prismático em que ocorre o resalto, pode-se obter a energia com a Equação (5), em que a energia é dada em Joules. Seguindo os seguintes passos:

- Dividindo ambos os termos por $\rho g y_1^3 B$, em que g representa a aceleração da gravidade;

- Usando:

$$v_1^2 = Fr_1^2 g y_1 \quad r = \frac{y_2^*}{y_1} \quad a' = \frac{a}{y_1} = L_r^*/2y_1 \quad b' = \frac{b}{y_1} = (y_2 - y_1)/2y_1$$

Obtém-se⁴ a forma adimensional para E_{rot} :

$$\frac{E_{rot}}{\rho g y_1^3 B} = \frac{\pi}{8} Fr_1^2 \frac{b'}{a' r^2} (r - 1)^2 \left[\frac{(a'^2 + b'^2)}{4} + a'^2 \frac{(r - 1)^2}{(r + 1)^2} \right] \quad (8)$$

Perda de Energia da Formulação Analítica

Já a perda de energia real, obtida da Equação (3) e adimensionalizada por y_1 , pode ser manipulada matematicamente⁴ e dada por:

$$\frac{\Delta E}{y_1} = \left(1 + \frac{Fr_1^2}{2} \right) - \left(r + \frac{Fr_1^2}{2r^2} \right) \quad (9)$$

Nota-se que a definição da Energia de Rotação E_{rot} no modelo proposto depende apenas da definição da geometria do rolo ($a'(L_r^*)$ e b') e das condições do ressalto (y_2^* , y_1 , Fr_1^2). A Perda de Energia ΔE obtida pela formulação analítica proposta por Bélanger é função apenas das condições do ressalto (y_2^* , y_1 , Fr_1^2). Logo, pode-se comparar as formas adimensionais apresentadas em (8) e (9) por meio da razão R . Se a hipótese de rotação rígida for válida, espera-se valores de $R \approx 1$.

$$R = \frac{\left(\frac{E_{rot}}{\rho g y_1^3 B} \right)}{\left(\frac{\Delta E}{y_1} \right)} \quad (10)$$

ANÁLISE DAS VARIÁVEIS E RESULTADOS

Definição da Geometria e Aeração do Ressalto

Como pode ser notado na Equação (9), a definição da Energia de Rotação e sua adimensionalização são função apenas da definição de L_r^* . Como apresentado na Figura 3, não há uma conversão nos valores de comprimento do rolo e do ressalto (também apresentado em Schulz *et al* (2015)). Portanto, decidiu-se testar as duas equações que resultaram nas envoltórias superior e inferior para a Figura 3:

$$L_r^* = y_1 \left[-12 + 160 \cdot \tanh \left(Fr_1 / 20 \right) \right] \quad \text{Hager (1992)} \quad (11)$$

⁴ As manipulações matemáticas foram omitidas para facilitar a leitura do texto

$$L_r^* = 6 \cdot (y_2^* - y_1) \quad \text{Marques (1996)} \quad (12)$$

A formulação apresentada por Hager (1992) apresenta menores valores de L_r^* , logo menores elipses em rotação contendo menores valores de E_{rot} quando comparada com a formulação apresentada por Marques (1996). Na adimensionalização feita na Equação (8), faz-se necessária a utilização da densidade do fluido ρ , uma vez que a massa é um dos componentes que se encontra no cálculo da Energia de Rotação (6).

Como o ressalto é um fenômeno de intensa aeração, além do comprimento do rolo, variou-se também a densidade do fluido. Utilizou-se uma faixa de concentrações médias de ar C incorporado de 0,3 até 0,7 (CHANSON, 1996; WANG e CHANSON, 2015), fazendo a seguinte relação entre a densidade do fluido em rotação ρ e as densidades do ar ρ_{ar} e da água $\rho_{\text{água}}$:

$$\rho = C \cdot \rho_{ar} + (1 - C) \cdot \rho_{\text{água}} \quad (13)$$

Como $\rho_{ar} \ll \rho_{\text{água}}$ pode-se desconsiderar o primeiro termo na Equação (13), de forma que a densidade do fluido altera a Equação (8) da seguinte maneira:

$$\frac{E_{rot}}{\rho_{\text{água}} g y_1^3 B} = (1 - C) \frac{\pi}{8} Fr_1^2 \frac{b'}{a'^2} (r - 1)^2 \left[\frac{(a'^2 + b'^2)}{4} + a'^2 \frac{(r - 1)^2}{(r + 1)^2} \right] \quad (14)$$

Resultados Obtidos

Variou-se em conjunto as possíveis concentrações de ar as duas relações de comprimento do rolo, obtendo as faixas de variações apresentadas na Figura 5.

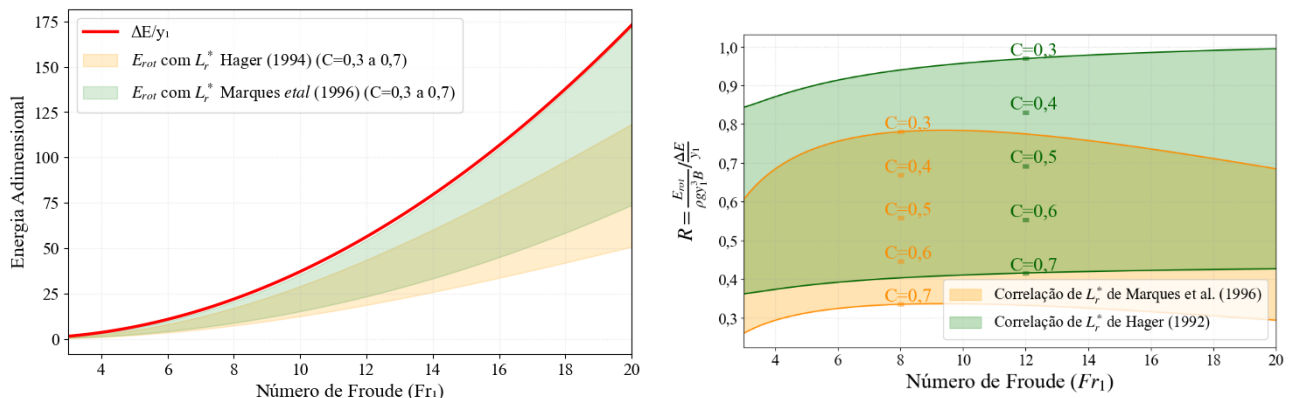


Figura 5 – Comparação entre a energia de uma rotação rígida com as dimensões e aeração de um ressalto hidráulico e a energia calculada com a Equação de Bélanger.

A perda calculada pela relação de Bélanger (Perda de Energia Real) encontra-se em vermelho. A comparação entre a energia cinética de rotação estimada pelo modelo simplificado e a perda de energia prevista pela equação de Bélanger mostrou que ambas permanecem da mesma ordem de grandeza para toda a faixa investigada de números de Froude. Dependendo da correlação adotada para o comprimento do rolo e da concentração média de ar considerada, a razão entre as energias variou aproximadamente entre 0,25 e 1,0. Os maiores valores foram obtidos utilizando a correlação

de Marques *et al.* (1996), enquanto a correlação de Hager (1992) resultou em estimativas sistematicamente inferiores, como esperado por resultar em menores elipses.

A proximidade entre as energias calculadas indica que o movimento coerente de recirculação pode representar uma parcela significativa da energia envolvida no ressalto hidráulico. Entretanto, a razão $R < 1$ obtida na maior parte dos casos indica que a energia associada à rotação organizada não é suficiente para representar integralmente a perda de energia do ressalto.

Pode-se especular diversas hipóteses para as demais perdas, como:

- Produção direta de turbulência fora da região de recirculação;
- Hipótese da rotação rígida: o modelo real apresenta deformação, alongamento, gradientes internos de velocidade, regiões de estagnação; e
- Mecanismos não representados: tridimensionalidade do ressalto, variação espacial da aeração, interação com a camada limite e tensões viscosas na base.

Validação Experimental Futura

Uma maneira de se investigar a natureza da dissipação de energia no ressalto hidráulico é a obtenção dos campos de velocidade do ressalto hidráulico. A utilização de técnicas ópticas não intrusivas, como o método de *Optical Flow* (medição de velocidades via vídeo), permite caracterizar campos de velocidade de forma detalhada, abrindo caminho para um novo tipo de análise quantitativa experimental sobre o conteúdo energético do ressalto.

Atualmente, os autores estão desenvolvendo um modelo físico para o estudo da natureza da dissipação do ressalto hidráulico e suas variações diante do uso de diferentes condições de montante, superfícies da bacia e obstáculos por meio da técnica do *Optical Flow* nos trabalhos de doutorado do aluno Múcio Ribeiro.

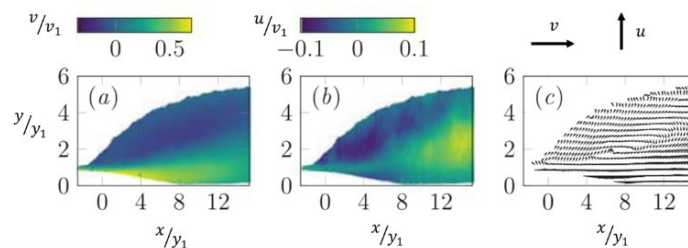


Figura 6 – Detecção de campos de velocidade em um ressalto hidráulico por meio de *Optical Flow*, $Fr_1=4,25$. Fonte: Adaptado de Kramer e Valero (2020).

CONCLUSÃO

O modelo proposto mostrou que a energia cinética associada à estrutura coerente de recirculação apresenta a mesma ordem de grandeza da perda de energia do ressalto hidráulico prevista pela equação de Bélanger. Entretanto, a energia associada à rotação organizada não reproduziu integralmente a dissipação total, indicando que parte da energia disponível é convertida diretamente em outras formas de movimento antes de ser dissipada. Entre os mecanismos potencialmente responsáveis por essa diferença destacam-se a produção de energia cinética turbulenta na camada de cisalhamento, as deformações da estrutura coerente de recirculação, os movimentos tridimensionais e os efeitos da aeração, aspectos não contemplados pela hipótese de rotação rígida adotada neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos da UFMG e ao Centro de Pesquisas em Recursos Hídricos (CPH) pelo apoio institucional.

REFERÊNCIAS

BÉLANGER, J.B. *Essai sur la Solution Numérique de quelques Problèmes Relatifs au Mouvement Permanent des Eaux Courantes* Carilian-Goeury, Paris, France, 1828.

BIDONE, G. *Expériences sur la propagation des remous*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. 30, pp. 195-292, 1820.

CHANSON, Hubert (Editor). *Energy Dissipation in Hydraulic Structures*. 1. ed. Dundee, UK: CRC Press, 2015.

CHANSON, Hubert. *Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows*. Elsevier, 1996.

CHANSON, Hubert. *Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena*. A survey of experimental results. European Journal of Mechanics-B/Fluids, v. 28, n. 2, p. 191-210, 2009.

DE PADOVA, Diana; MOSSA, Michele. *Hydraulic jump: a brief history and research challenges*. Water, v. 13, n. 13, p. 1733, 2021.

FRIZELL, K. Warren; SVOBODA, Connie D. *Performance of Type III Stilling Basins-Stepped Spillway Studies: Do Stepped Spillways Affect Traditional Design Parameters?* US Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 2012.

HAGER, Willi H. *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*. Water Science and Technology Library, 1992.

HAGER, Willi H.; SCHLEISS, A. J.; BOES, R. M.; PFISTER, M. *Hydraulic Engineering of Dams*. 1. ed. Zurich, Lausanne, Fribourg: [s. n.], 2020. v. 1.

KOLMOGOROV, A. N. *The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*. Doklady Akademii Nauk SSSR, vol. 30, no. 4, pp. 301–305, 1941.

KOLMOGOROV, Andrey Nikolaevich. *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*. Journal of Fluid Mechanics, v. 13, n. 1, p. 82-85, 1962.

KRAMER, Matthias; VALERO, Daniel. *Turbulence and self-similarity in highly aerated shear flows: The stable hydraulic jump*. International Journal of Multiphase Flow, v. 129, p. 103316, 2020.

MARQUES, M. G.; DRAPEAU, J.; VERRETTE, J.-L. *Análise da flutuação de pressão provocada pela formação de um ressalto hidráulico a jusante de vertedouro*. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE HIDRÁULICA, 17., 1996, Guayaquil. Anais... Guayaquil: IAHR/SOCHID, 1996. v. 1, p. 129-149.

PETERKA, Alvin J. Hydraulic design of stilling basins and energy dissipators. United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation, 1964.

RIBEIRO, Múcio Eurico Correa. *Modelagem física da utilização de soleiras entre trechos liso e em degraus em canais de forte declividade*. 110 f. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2023.

SCHULZ, H. E.; SIMÕES, A. L. A.; NÓBREGA, J. D. *Details of Hydraulic Jumps for Design Criteria of Hydraulic Structures*. In: Hydrodynamics - Concepts and Experiments. IntechOpen. 2015.

THOMAS, Martin. *Combustor-turbine interactions: Hot spot migration and thermal environment prediction for a better understanding and design of helicopter engines*. Tese de Doutorado. Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT. 2021.

WANG, H.; CHANSON, H. *Air Entrainment and Turbulent Fluctuations in Hydraulic Jumps*. Urban Water Journal, v. 12, n. 6, p. 502-518, 2015.