

## XXVI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

# **ANÁLISE COMPARATIVA DE METODOLOGIAS PARA DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE DISPERSÃO LONGITUDINAL COM A UTILIZAÇÃO DE TRAÇADOR NO RIO BARIGUI**

*João Pedro Maciel Schmaedecke<sup>1</sup> & Michael Mannich<sup>2</sup>*

**Abstract:** The longitudinal dispersion coefficient represents the dispersion process of a plume along the flow in a river. To estimate concentration distribution behavior, this hydrodynamic parameter is associated with mass transport equations, geometric characteristics of the water body, and variables such as average flow velocity in hydrological models. In this study, the longitudinal dispersion coefficient was determined through an experimental test using tracers (Rhodamine B) in the Barigui River, Curitiba, Brazil. The methodologies applied include the Method of Moments, the Propagation Method, the Peak Concentration Method, the Concentration Ring Method, and Chatwin's Method, all corrected for mass and area. The average value of the longitudinal dispersion coefficient for the Barigui River in the present study was 4.02 m<sup>2</sup>/s, with a standard deviation of 1.10, as determined from experimental tests using the previously described direct methodologies.

**Resumo:** O coeficiente de dispersão longitudinal representa o processo de dispersão de uma pluma ao longo de um escoamento em um rio. Para estimar comportamentos de distribuição de concentrações, tal parâmetro hidrodinâmico é associado a equações de transporte mássico, características geométricas do corpo hídrico e variáveis como a velocidade média em modelos hidrológicos. Neste estudo, o coeficiente de dispersão longitudinal foi determinado através de ensaio experimental, com a utilização de traçadores (rodamina B) no rio Barigui, Curitiba-PR. As metodologias aplicadas consistem no Método dos Momentos, Método da Propagação, Método do Pico de Concentração, Método da Coroa de Concentração e Método de Chatwin, todas corrigidas em termos de massa e área. O valor médio do coeficiente de dispersão longitudinal para o rio Barigui no presente estudo foi de 4,02 m<sup>2</sup>/s, com desvio padrão equivalente a 1,10, resultados dos ensaios experimentais com a utilização das metodologias diretas previamente descritas.

**Keywords:** Longitudinal dispersion coefficient, Fluid Mechanics, Longitudinal dispersion in rivers

**Palavras-Chave:** Coeficiente de dispersão longitudinal, Mecânica dos Fluidos, Dispersão longitudinal em rios.

## **INTRODUÇÃO**

A caracterização de fenômenos hidrológicos e hidrodinâmicos através de modelagens é fundamental para a garantia de qualidade e segurança ambiental (Deng et al., 2006). O coeficiente de dispersão longitudinal corresponde a um parâmetro a ser avaliado, acrescido ao entendimento de outros processos de transporte em corpos hídricos, para a compreensão do fenômeno da dispersão

<sup>1</sup>) Universidade Federal do Paraná, Av. Cel. Francisco H. dos Santos, 100, Jardim das Américas, Curitiba - PR, [joaoschmaedecke@ufpr.br](mailto:joaoschmaedecke@ufpr.br)

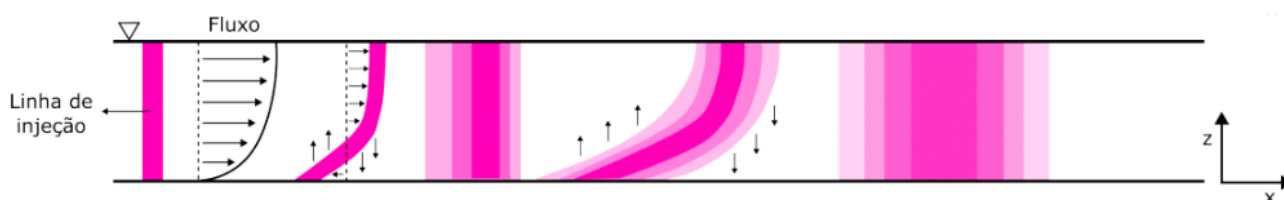
<sup>2</sup>) Universidade Federal do Paraná, Av. Cel. Francisco H. dos Santos, 100, Jardim das Américas, Curitiba - PR [mannich@ufpr.br](mailto:mannich@ufpr.br)

em rios. Tal parâmetro encontra-se agregado à equação da advecção-dispersão unidimensional (Fischer et al., 1979) na forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

Na qual,  $C$  corresponde à concentração de soluto ( $\text{kg/m}^3$ ),  $U$  a velocidade média do escoamento ( $\text{m/s}$ ),  $D_L$  é o coeficiente de dispersão longitudinal ( $\text{m}^2/\text{s}$ ),  $x$  é a coordenada longitudinal ( $\text{m}$ ) e  $t$  é o tempo ( $\text{s}$ ). Tal formulação admite e engloba os efeitos combinados de dispersão transversal e cisalhamento vertical no seu processo de dedução e é aplicada em estudos ambientais distintos. Para fins de visualização, a figura a seguir ilustra de maneira unidimensional, o fenômeno da difusão turbulenta, agregada a advecção, em uma injeção vertical, evidenciando a interferência dos fluxos de cisalhamento e transversal no processo de dispersão longitudinal (Park et al., 2020).

Figura 1 – Processo de dispersão ao longo de um eixo  $x$  com interferências dos fluxos de cisalhamento. Adaptado de Lima (2023).



Ainda segundo Fischer et al., (1979), algumas alterações são propostas para possibilitar estimativas aprimoradas deste coeficiente. O coeficiente de difusão turbulenta  $\epsilon_t$  é incrementado ao processo de dedução em relação ao de difusão molecular, anteriormente utilizado. De tal maneira, torna-se possível obter ( $D_L$ ) a partir de:

$$D_L = - \frac{1}{A} \int_0^B u' h(y) \int_0^y \frac{1}{\epsilon_t h(y)} \int_0^y u' h(y) dy dy dy \quad (2)$$

Na qual  $A$  corresponde a área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ),  $B$  a largura da mesma seção ( $\text{m}$ ),  $u'$  ao desvio da velocidade da média ( $\text{m/s}$ ),  $h$  a profundidade na seção ( $\text{m}$ ),  $y$  a coordenada na seção ( $\text{m}$ ) e  $\epsilon_t$  ao coeficiente de difusão turbulenta transversal ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

Ademais, é possível estimar o coeficiente de dispersão longitudinal por meio de metodologias diretas, que envolvem experimentos in-situ, com a utilização de traçadores como a Rodamina (B), Fluoresceína, NaCl, entre outros, aferindo as respectivas concentrações do traçador ao longo do tempo em pontos distintos de um rio. Após a obtenção dos dados, métodos diretos como o Método dos momentos, proposto por Thackston, Hays e Krenkel, segundo Fischer (1968), o Método da Propagação proposto por Fischer (1968), o Método do Pico de Concentração desenvolvido por Rutherford (1994), o Método da Coroa de Concentração elaborado por Barbosa Júnior et al. (2005) e o Método de Chatwin concebido por Chatwin (1971) podem ser aplicados com este objetivo.

Neste contexto, diante de vários métodos para determinação de  $D_L$  a partir da mesma base de dados, o presente estudo tem o objetivo de determinar o coeficiente de dispersão longitudinal através das metodologias diretas realizadas após experimentos in-situ com traçador, comparando os resultados obtidos para avaliar a interferência absoluta de simplificações assumidas entre metodologias distintas em relação a abordagens que incorporam características com nível de detalhamento superior, ao considerarem efeitos ao longo do escoamento no corpo hídrico.

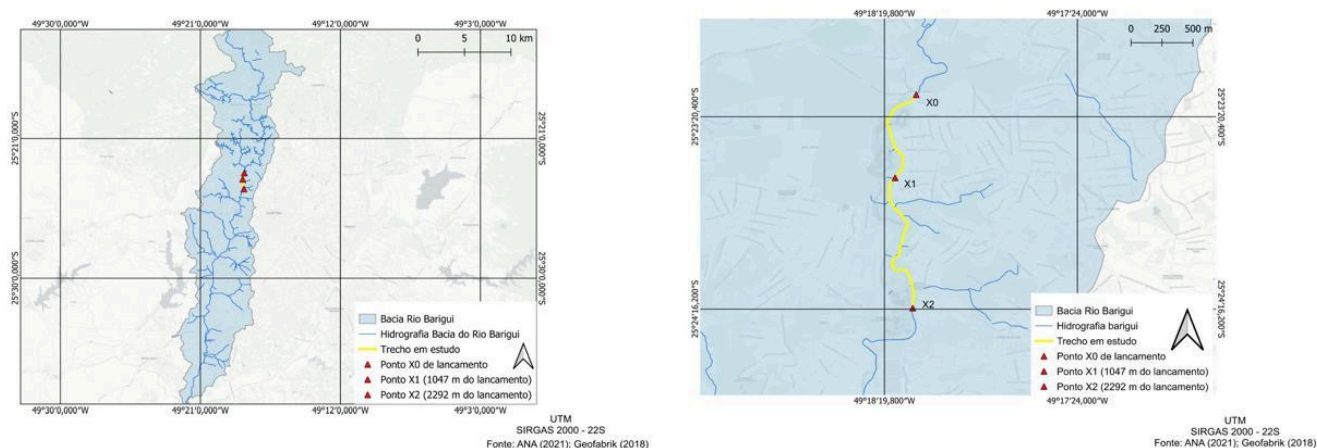
## MÉTODOS

### ÁREA DE ESTUDO E TRAÇADOR UTILIZADO

Para o presente estudo, a campanha de medição foi realizada, na data 18/03 de 2025, em um trecho do Rio Barigui, corpo hídrico que possui 54 km de extensão, com nascente entre os municípios de Almirante Tamandaré e Rio Branco do Sul e foz na divisa entre Curitiba e Araucária (PARANÁ, 2020). O rio está localizado na bacia do Rio Barigui, cortando a capital paranaense em 45 km de seu curso, sendo o trecho selecionado para este trabalho situado no Parque Tingui, Curitiba-PR.

A Figura 2 ilustra a representação da bacia analisada, assim como a localização dos pontos de lançamento ( $x_0$ ), onde ocorreu a injeção do traçador Rodamina B, e amostragem ( $x_1$  e  $x_2$ ), nos quais foram coletadas 100 amostras em intervalos de tempos distintos e previamente estabelecidos. O ponto de amostragem  $x_1$  está localizado a 1047 metros do ponto de injeção do traçador, enquanto  $x_2$  está situado a 2292 metros em relação ao mesmo referencial.

Figura 2 –Bacia e Hidrografia do Rio Barigui, com destaque para o trecho em estudo e pontos de amostragem.



### METODOLOGIAS DIRETAS EXPERIMENTAIS

Com a finalidade de determinar o coeficiente de dispersão longitudinal experimentalmente, uma campanha de medição, datada em 18/03/2025, foi realizada. A injeção de 90 g do traçador Rodamina B diluídas em água no ponto  $x_0$  foi feita, acrescida a coleta de cem amostras em intervalos de tempo com espaçamentos pré-definidos e não padronizados nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ , para posterior plotagem de gráficos, que evidenciam o comportamento da pluma do traçador em termos de concentração (ppb) por tempo (s). As seções foram pré-estabelecidas baseadas na proposição de Fischer. et al (1979), na qual o comprimento de mistura é estimado por  $L_m = 0,10 \cdot U \cdot B/\epsilon_t$ .

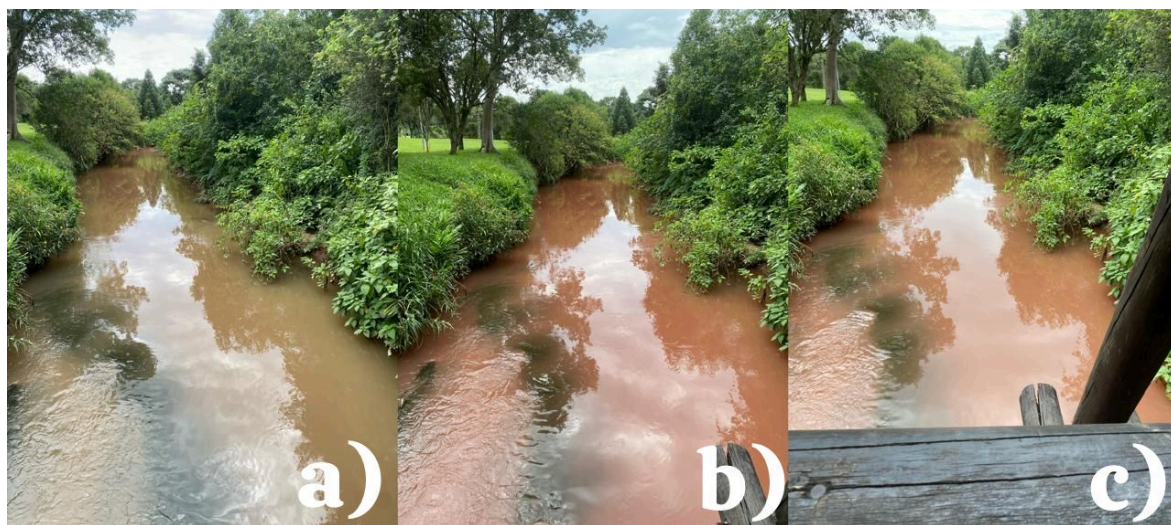
Figura 3 – Injeção do traçador Rodamina B no ponto  $x_0$ .





A Figura 4 apresenta imagens no ponto  $x_1$  em diferentes horários após o lançamento do traçador são apresentadas, para fins de visualização do fenômeno da dispersão longitudinal neste corpo hídrico.

Figura 4 – Fotografias no ponto  $x_1$  após: a) 30 minutos; b) 35 minutos e c) 45 minutos após injeção do traçador no corpo hídrico.



Após a campanha, as cem amostras de cada ponto são analisadas em termos de concentração, com o fluorímetro Aqua Fluor®, fabricado pela Turner Designs e previamente calibrado e que opera na faixa entre 0,4 e 400 ppb. Com isso, as curvas temporais de concentração para cada seção foram plotadas e os métodos diretos aplicados para determinar  $D_L$ .

O Método dos Momentos, desenvolvido por Thackston, Hays e Krenkel (1967) segundo Fischer (1968), relaciona o coeficiente de dispersão longitudinal com a taxa de variação da variância da pluma. O coeficiente de dispersão é expresso por:

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2}{dt} \quad (9)$$

Pela hipótese da nuvem congelada, na qual a pluma não apresenta mudanças em seu formato ao passar pela zona de amostragem (Barbosa Júnior et al., 2005), a variação espacial ( $\sigma_x^2$ ) pode ser aproximada por  $\sigma_x^2 = u \cdot \sigma_t^2$ . Para dar continuidade a aplicação deste método, faz-se necessário a

construção de dois perfis de concentração ao longo do tempo, um para cada seção de amostragem. Desse modo, para as duas seções de amostragem  $x_1$  e  $x_2$  tem-se:

$$D_L = \frac{U}{2} \frac{\sigma_t^2(x_2) - \sigma_t^2(x_1)}{\bar{t}(x_2) - \bar{t}(x_1)} \quad (10)$$

Na qual  $\bar{t}$  é o tempo médio (s) de passagem da pluma nos pontos de amostragem e  $\sigma_t^2$  a variância temporal. As variâncias temporais e tempos médios podem ser obtidos utilizando os momentos de ordem n conforme disposto a seguir:

$$M_n = \int_0^{\infty} t^n C(t) dt \quad (11)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2 \quad (12)$$

$$\bar{t} = \frac{M_1}{M_0} \quad (13)$$

O método da propagação (Fischer, 1968) demanda, assim como o anterior, dois perfis de concentração em função do tempo para duas seções diferentes, utilizando valores da primeira seção para aprimorar a propagação na segunda, alterando parâmetros como a velocidade e o coeficiente de dispersão longitudinal. Utiliza-se a Equação 1, com a aplicação de uma integral de convolução na distribuição inicial  $C(x_1, t)$  para atingir uma outra distribuição no segundo trecho  $C(x_2, t)$ , na qual  $\tau$  corresponde a uma variável temporal para integração.

$$C(x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(x_1, \tau)}{\sqrt{4\pi D_L (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}} \exp\left\{-\frac{[U(\bar{t}_2 - \bar{t}_1 - t + \tau)]^2}{4D_L (\bar{t}_2 - \bar{t}_1)}\right\} U d\tau \quad (14)$$

O Método de Chatwin (Chatwin, 1971) utiliza transformações logarítmicas para linearizar a solução da Equação 1. Não é necessário a presença de dois perfis de amostragens em seções diferentes e os dados selecionados para uso neste método correspondem àqueles do início ao pico de concentração em uma seção de coleta. Assume uma constante  $k = (M/A) \cdot \sqrt[3]{4\pi D_L}$  e atinge-se:

$$\left[t \ln\left(\frac{k}{C\sqrt{t}}\right)\right]^{0,5} = \frac{x}{2\sqrt{D_L}} - \frac{Ut}{2\sqrt{D_L}} \quad (15)$$

O Método do Pico de Concentração (Rutherford, 1994) propõe a determinação do coeficiente de dispersão longitudinal conhecendo a concentração máxima ( $C_p$ ), tendo como resultado:

$$C_p = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D_L \left(\frac{x_p}{U}\right)}} \quad (16)$$

O Método da Coroa de Concentração (Barbosa Júnior et al., 2005) elege uma concentração crítica ou arbitrária ( $C_c$ ) em um tempo fixo ( $t_c$ ) e a relaciona com a concentração de pico, de modo que a expressão resultante está apresentada como

$$D_L = \frac{(\Delta t_c U/4)^2}{t_p \ln(C_p/C_c)} = \frac{\Delta t_c^2}{16t_p^3} \frac{x^2}{\ln(C_p/C_c)} \quad (17)$$

Na qual  $t_p$  é o tempo da concentração máxima,  $t_c$  o tempo da concentração crítica e  $\Delta x_c$  o trecho no qual a concentração excede o valor da concentração crítica arbitrada. Pela hipótese da nuvem congelada:

$$\Delta t_c = \frac{\Delta x_c}{U} = \frac{\Delta x_c \cdot t_p}{x} \quad (18)$$

## RESULTADOS

Inicialmente, parâmetros físicos do corpo hídrico como área da seção, profundidade, largura vazão e velocidade média foram mensurados na seção transversal do ponto  $x_1$ , com a utilização do equipamento ADV FlowTracker e encontram-se apresentados na Tabela 1.

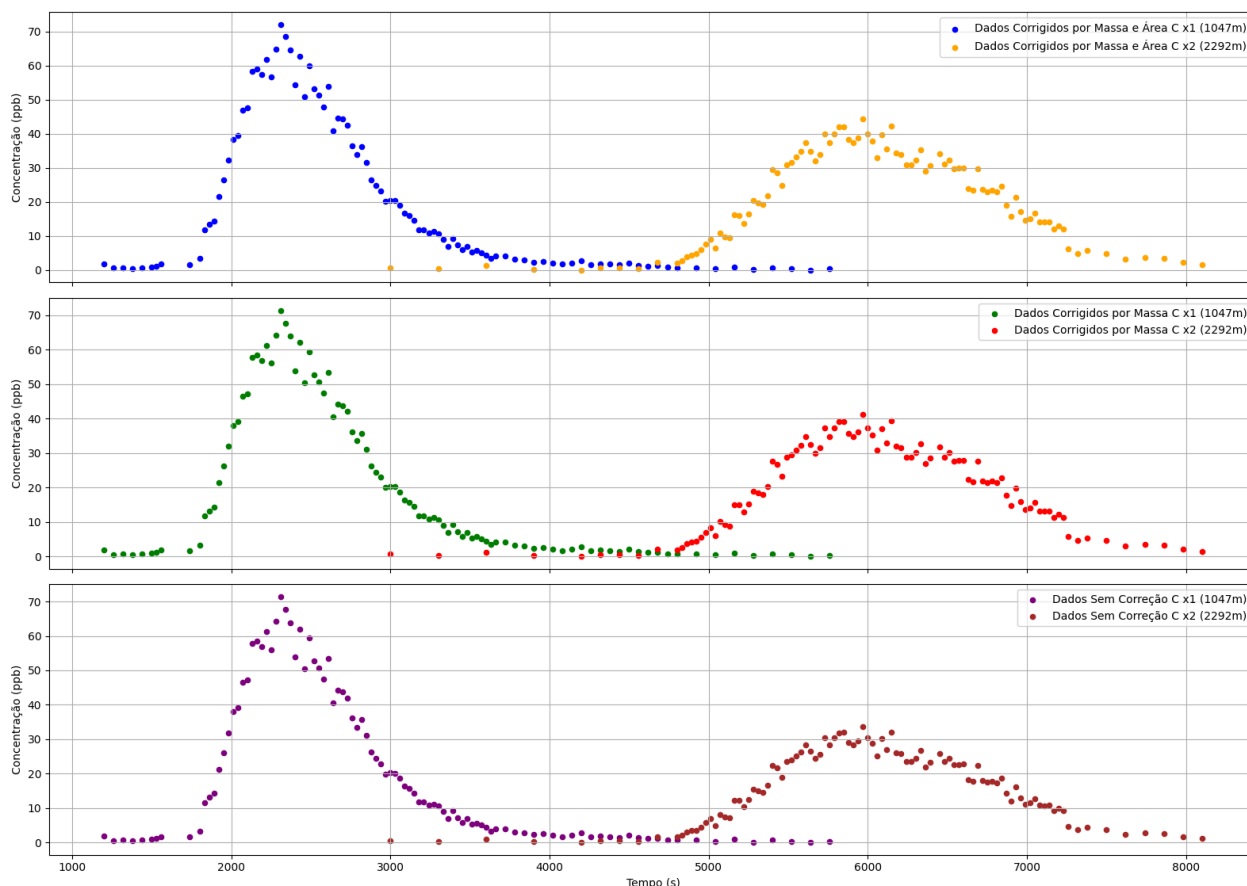
Tabela 1 – Medições de parâmetros físicos na seção transversal em  $x_1$

Parâmetro físico	Valor
Área da seção transversal ( $m^2$ )	4,31
Vazão média na seção transversal ( $m^3/s$ )	1,76
Velocidade média na seção transversal ( $m/s$ )	0,41

Para a campanha realizada, foram plotados gráficos representativos dos perfis de concentração ao longo do tempo para as duas seções de amostragem, com correções em termos de massa e área sendo aplicadas. A massa foi corrigida através do cálculo de um fator de correção estimado por  $\sum C_{x1} \cdot dt / \sum C_{x2} \cdot dt$  equivalente a 1,22 neste presente estudo, enquanto as áreas da bacia até os pontos de interesse foram determinadas, sendo os fatores de correção aplicados iguais a  $A(x_1)/A(x_0) = 1,01$  para as concentrações no ponto  $x_1$  e  $A(x_2)/A(x_1) = 1,075$  para as concentrações no ponto  $x_2$ .

Em termos mássicos, a correção permite considerar uma quantidade de massa faltante para que o balanço seja satisfeito entre a primeira e segunda seção, enquanto em relação a área possibilita estimar o aumento de vazão decorrente da ampliação de área, considerando a vazão específica  $q = Q/A$  ( $m/s.km^2$ ) constante ao longo da bacia. A seguir, apresentam-se os gráficos referentes aos perfis temporais de concentração, descontados de um valor de concentração branco medido anteriormente ao experimento, antes e depois de serem corrigidos.

Figura 5 – Perfis temporais de concentração nas seções  $x_1$  e  $x_2$ , dados brutos e corrigidos.



Com a aplicação das metodologias diretas previamente detalhadas neste trabalho, o coeficiente de dispersão longitudinal pôde ser obtido por diferentes técnicas. Após aplicação dos métodos: Método dos Momentos, Método da Propagação, Método de Chatwin, Método do Pico de Concentração e Método da Coroa de Concentração, o coeficiente de dispersão longitudinal foi determinado conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 2 – Determinação de  $D_L$  para diferentes metodologias diretas e indiretas, bruto e corrigido. \* indica métodos que não sofrem alteração no resultado pelas correções aplicadas.

Método	$D_L$ ( $m^2/s$ )	$D_L$ ( $m^2/s$ ) corrigido pela massa	$D_L$ ( $m^2/s$ ) corrigido pela massa e área
Método dos Momentos	3,41	3,41*	3,41*
Método da Propagação	7,15	4,27	3,71
Método de Chatwin	4,06	4,06*	4,06*
Método do Pico de Concentração	3,49	2,71	2,47
Método da Coroa de Concentração	4,80	4,80	4,57



O coeficiente de dispersão longitudinal médio da Bacia do Rio Barigui determinado foi correspondente a 4,02 ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) com desvio padrão de 1,10. Os valores corrigidos pela massa são ligeiramente inferiores à média, enquanto o Método de Chatwin é aquele com valores médios mais próximos (4,06). O Método do Pico de Concentração e o Método da Propagação apresentam a menor e maior média de  $D_L$  respectivamente (2,89 e 5,05) dentre aqueles sob análise.

## CONCLUSÃO

A realização dos ensaios no Rio Barigui possibilitou a determinação do coeficiente de dispersão longitudinal por metodologias distintas. O método de Chatwin ficou mais próximo do valor médio do coeficiente, sendo aproximadamente 0,8% inferior à média total, enquanto os Métodos da Propagação e do Pico de Concentração são os que apresentam maior diferença em termos percentuais, com índices médios 25% superior e 28% inferior à média respectivamente. Notou-se que as correções, tanto em termos mássicos quanto em área, não impactaram de maneira significativa os Métodos de Chatwin e dos Momentos.

Para trabalhos futuros, estuda-se a possibilidade de realizar ensaios em outros rios, assim como ampliar o número de campanhas para o ajuste de uma possível equação adaptada para o coeficiente de dispersão longitudinal. Recomenda-se o estudo de uma possível “massa ótima” do traçador Rodamina B a ser lançada, a depender de parâmetros do corpo hídrico, com estimativas que evitem o desperdício de material e a transgressão da faixa de detecção na qual o aparelho medidor de concentração opera.

## AGRADECIMENTOS

O autor JPMS agradece ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), assim como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) como agência de fomento. O autor MM agradece a bolsa produtividade do CNPq.

## REFERÊNCIAS

- ANA – AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO. (2021). *Base Hidrográfica BHB 1:250.000 – Documentação Técnica*. Brasília: ANA. Disponível em: [https://metadados.snirh.gov.br/geonetwork/srv/api/records/3d87216f-e45e-41d8-9837-074c1608fb1e/attachments/Documentacao\\_Tecnica\\_BHB250.pdf](https://metadados.snirh.gov.br/geonetwork/srv/api/records/3d87216f-e45e-41d8-9837-074c1608fb1e/attachments/Documentacao_Tecnica_BHB250.pdf). Acesso em maio de 2025.
- BARBOSA JR., A. R.; SILVA, G. Q. da; NEVES, B. V. B. (2005). *Métodos diretos de determinação do coeficiente de dispersão longitudinal em cursos d'água naturais. Parte 1 – Fundamentos teóricos*. Revista Escola de Minas – REM, Ouro Preto, jan.–mar. v. 58, n. 1, p. 27–32,
- CHATWIN, P. (1971). *On the interpretation of some longitudinal dispersion experiments*. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, v. 48, n. 4, p. 689–702.
- CHIN, D. A. (2012). *Water-Quality Engineering in Natural Systems: Fate and Transport Processes in the Water Environment*. 2. ed. Hoboken: Wiley.
- DENG, Z.; BENGTSSON, L.; SINGH, V. P. (2006). *Parameter estimation for fractional dispersion model for rivers*. Environmental Fluid Mechanics, Springer, v. 6, p. 451–475,



DENG, Z.-Q.; SINGH, V. P.; BENGTSSON, L. (2001). *Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers*. Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, v. 127, n. 11, p. 919–927.

FISCHER, H. B. (1968). *Dispersion predictions in natural streams*. Journal of the Sanitary Engineering Division, American Society of Civil Engineers, v. 94, n. 5, p. 927–943.

FISCHER, H. B.; KOH, R. C. Y.; BROOKS, N. H.; LIST, E. J.; IMBERGER, J. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press Inc.

GEOFABRIK GmbH. (2025). *Shapefile da Região Sul do Brasil – Extração OpenStreetMap*. Disponível em: <https://download.geofabrik.de/south-america/brazil/sul.html>. Acesso em maio de 2025

LIMA, M. F. D. S. *Estudos de determinação experimental dos coeficientes de dispersão longitudinal e de reaeração em rios*. 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2023.

PARANÁ (2020). “*Aqui passa o rio Barigui*”. Disponível em: <https://mid.curitiba.pr.gov.br/2020/00290752.pdf#:~:text=bacia%20do%20Rio%20Barigui%20tem>. Acesso em maio de 2025

PARK, I. *et al.* *Comparisons of two types of particle tracking models including the effects of vertical velocity shear*. Water, MDPI, v. 12, n. 12, p. 3535, 2020.

RUTHERFORD, J. C. (1994). *River Mixing*. Wiley, [s.l.].

TURNER DESIGN. (2023). *AquaFluor – Handheld Fluorometer and Turbidimeter – Manual*. [s.l.]