

## XXVI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

### **TRAÇADO ECONÔMICO DE CANAIS ABERTOS: MODELOS BASEADOS EM IA E PROGRAMAÇÃO DINÂMICA – PARTE I: ASPECTOS TEÓRICOS**

*Francisco Jácome Sarmiento<sup>1</sup>*

**Abstract:** This study proposes and analyzes three computational approaches for determining the optimal alignment of gravity-fed open channels: a model based on a modified A\* algorithm, another based on genetic algorithms, and a third using dynamic programming. Each model incorporates hydraulic and economic constraints and operates over a digital elevation matrix. The concept of cut-and-fill equilibrium depth is introduced and integrated into the objective function via penalization of deviations from this condition. The methods are designed for sequential execution and aim to minimize implementation costs by optimizing earthwork volumes. These methodologies are tailored for civil engineering projects in complex regions, such as Brazil's semi-arid zones.

**Resumo:** Este trabalho propõe e analisa três abordagens computacionais para a determinação do traçado ótimo de canais abertos gravitatórios: um modelo baseado no algoritmo A\* modificado, outro em algoritmos genéticos, e um terceiro valendo-se de programação dinâmica. Cada modelo considera restrições hidráulicas e econômicas, e opera sobre uma matriz digital de elevações do terreno. Introduce-se também a noção de profundidade de equilíbrio entre corte e aterro, integrando-a à função objetivo por meio de penalidades em decisões que se afastam dessa condição. Os métodos são estruturados de forma sequencial, e sua aplicação visa otimizar o custo de implantação do canal considerando volumes de movimentação de terra. As metodologias foram desenvolvidas para permitir aplicação em projetos de engenharia civil com alta complexidade, como os do semiárido brasileiro.

**Palavras-Chave** – Algoritmo A\*, programação dinâmica, algoritmos genéticos; canais abertos.

#### **INTRODUÇÃO**

O traçado econômico e eficiente de canais abertos para transporte de água por gravidade constitui um dos principais desafios da engenharia de recursos hídricos, uma vez que projetos desse tipo devem conciliar da melhor maneira possível exigências hidráulicas, geotécnicas, econômicas, ambientais e operacionais. A determinação de uma rota ótima envolve múltiplas variáveis, como a topografia do terreno, a declividade hidráulica, os custos de materiais e serviços, dentre os quais preponderam aqueles relacionados com movimento de terra (volumes de corte e aterro, distância de transporte, entre outros), além das restrições ambientais e operacionais do canal, etc.

A aplicação de algoritmos computacionais para a automação e otimização desse processo tem crescido consideravelmente. Neste trabalho são propostas e analisadas três abordagens alternativas, duas delas baseadas em algoritmos atinentes ao campo da Inteligência Artificial (IA) e uma terceira cuja solução é dada por Programação Dinâmica. Oferece-se assim uma combinação de heurísticas clássicas com técnicas de otimização objetivando encontrar o traçado de menor custo para canais abertos em terrenos representados por matrizes de cotas topográficas.

---

1) Professor Titular da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, Campus I, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – DECA, Centro de Tecnologia - CT, João Pessoa – PB,(83) 3216-7355, e-mail: franciscojacomesarmiento@gmail.com

## REFERENCIAL TEÓRICO

A otimização de traçados de canais abertos para adução de água por gravidade é um problema clássico da engenharia, caracterizado por sua alta complexidade espacial e múltiplos condicionantes técnicos, econômicos e ambientais. A busca por soluções ótimas neste domínio tem se beneficiado da aplicação de algoritmos de inteligência artificial, especialmente os metaheurísticos combinados com heurísticas clássicas como o algoritmo A\*, conforme proposto por Sarmento e Molinas (2012) e Sarmento (2014a e 2014b).

Sarmento e Molinas (2012) introduziram um algoritmo metaheurístico baseado na cubação paramétrica de seções transversais do canal em cada célula de um modelo digital do terreno (MDT). A geometria da seção transversal é considerada de forma dinâmica — podendo ser em corte, aterro ou mista — com inserção automática de bermas, inclinação de taludes e parâmetros de declividade predefinidos.

Sarmento (2014a) detalha os aspectos teóricos do uso do algoritmo A\* adaptado. A função objetivo do algoritmo considera  $P = C + H + D$ , com  $C$  sendo o custo acumulado desde a origem,  $H$  a heurística (distância ao destino), e  $D$  um termo penalizador relacionado à diferença altimétrica. Sarmento (2014b) aplica o método ao Ramal do Agreste Pernambucano, comprovando sua aplicabilidade prática ao comparar o traçado executivo com rotas otimizadas em termos de custo e movimentação de terra.

Salem et al. (2022) propuseram o modelo OCCD (Open Channel Comprehensive Design), que integra otimização de alinhamento, perfil e seção transversal simultaneamente. A aplicação ao Canal Sheikh Zayed, no Egito, demonstrou economias superiores a 25%, em comparação com o valor obtido na fase de projeto.

Ainda concernente à otimização de rotas de obras hidráulicas longilíneas, o algoritmo BAGDA (Busca pelo Ajuste Geométrico da Despesa Anual), desenvolvido e apresentado em Sarmento (2022), otimiza o traçado de adutoras sob pressão com base na minimização da despesa anual total. Essa despesa incorpora tanto os custos de aquisição e implantação da tubulação quanto os custos operacionais de energia ao longo da vida útil do sistema. A metodologia permite que a geometria da adutora (incluindo o comprimento e altura manométrica) seja determinada de forma automática, respeitando restrições topográficas e hidráulicas. Aplicações práticas mostraram que o BAGDA é eficiente e gera soluções isentas de subjetividades, adequadas para sistemas adutores sob bombeamento.

Adarsh e Sahana (2013) projetam uma classe especial de canais de drenagem com fundo horizontal e lados parabólicos (HBPS) usando uma ferramenta de otimização metaheurística relativamente recente, a busca global probabilística de Lausanne (PGSL). As soluções dos diferentes modelos são consideradas competitivas com aquelas obtidas por procedimentos clássicos de otimização e otimização por enxame de partículas (PSO).

Na abordagem proposta por Niazkar e Afzali (2015), o custo total de um canal compreende o revestimento, o custo da terraplenagem e o custo adicional de escavação, considerando a profundidade da terraplenagem abaixo da superfície do solo. Os autores apresentam o que denominam “uma nova técnica de otimização” chamada de algoritmo *Modified Honey Bee Mating Optimization* (MHBMO) e a utilizam para resolver o problema de projeto desse tipo de obra hidráulica.

## METODOLOGIA

Em todas as abordagens que serão apresentadas, partiremos dos dados de entrada que mais facilmente se dispõe nas investigações preliminares relacionados à implantação de projetos de adução hidráulica através de canais, a saber:

- Matriz digital de cotas do terreno;
- Ponto de captação ( $X_C, Y_C$ ) e de entrega ( $X_E, Y_E$ );
- Cota inicial do fundo do canal  $C_{f_{inicial}}$  e declividade  $s$ ;
- Cotas mínima e máxima permitidas, a quais delimitam a faixa altimétrica formadora do espaço geográfico de busca da rota ótima, ou seja, região fora das zonas de exclusão. Tais zonas corresponderem a áreas de altimetria muito acima ou muito abaixo do que a experiência do projetista tem como viáveis para implantação da obra, bem como áreas de preservação ambiental, ou áreas restritas por quaisquer outras razões impeditivas de seu uso para obras dessa natureza;
- Custos de implantação de seções geométricas de terraplenagem em corte e em aterro: fornecido na forma de proporção, em geral, aqui admitido como sendo uma unidade de corte equivalente a dez unidades de aterro;
- Parâmetros do algoritmo genético: tamanho da população  $N$ , número de gerações  $G$ , taxa de mutação  $\mu$ , e tamanho do torneio  $T$ .

### Modelo 1: Determinação do traçado ótimo com base no algoritmo A\* modificado

Conforme assinala Sarmento (2008), o projeto geométrico das seções transversais do canal é impactado principalmente pela (a) topografia local, dado que a escolha de greide (linha de fundo do canal) influencia diretamente no custo do movimento de terra; bem como pela (b) geologia do terreno, ou seja, espessuras das camadas de material de 1ª e 2ª categorias (profundidade do topo do material de 3ª categoria), os quais afetam significativamente os custos de escavação.

O artigo acima referido apresenta o SIDOC (Sistema Integrado de Dimensionamento e Orçamento de Canais), um programa computacional que permite testar diversas seções transversais hidráulicas e definições geométricas (taludes de corte e de aterros, revestimentos, etc.) atinentes ao projeto de canais abertos, possibilitando obter orçamentos parciais e totais associados a diferentes greides, o que permite identificar, por meio de iteração computacional, o mais econômico, considerando: (i) variações positivas e negativas da cota de fundo do canal; (ii) possíveis penalizações no consumo de energia, caso ocorra queda ao longo do canal e; (iii) variações em custos de escavação, conforme a disposição e espessura dos extratos do subsolo, refazendo para isso, a cada estaca do caminhamento, o projeto geométrico da seção de terraplenagem de acordo com o greide em análise.

Uma versão da rotina computacional do SIDOC destinada ao projeto automático das seções de terraplenagem ao longo da rota do canal foi simplificada e adaptada para servir à preparação de uma camada (*layer*) a ser sobreposta à matriz de cotas topográficas fornecida como dado de entrada. Assim, cada cota integrante da matriz  $n \times m$  foi substituída pelo valor equivalente ao movimento de terra resultante da implantação da seção de terraplenagem obtida automaticamente, considerando que, em cada ponto contido na matriz de cotas, para pequenas declividades do fundo do canal, a cota do fundo seria bem aproximada pela equação (1):

$$C_{f_{i,j}} = C_{f_{inicial}} - s \times \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_j)^2} \quad (1)$$

Onde:

$C_{f,i,j}$ : Estimativa da cota do fundo do canal (m) no ponto  $(i, j)$  da matriz representativa do terreno em  $(x_i, y_j)$ ;

$C_{f, inicial}$ : Cota inicial do fundo do canal no ponto de captação da água  $(x_0, y_0)$ ;

$s$ : Declividade longitudinal (cm/km) do fundo do canal (considerada fixa).

Sobre esse espaço de busca transformado, foi aplicado um procedimento baseado no algoritmo A\* modificado, conforme proposto por Sarmiento e Molinas (2012).

## Modelo 2: Rota otimizada com Algoritmo Genético

### Geração da População Inicial

A população inicial é gerada por um algoritmo A\* modificado que considera topografia e declividade hidráulica. Cada trajeto deve respeitar: (i) limites de cota do terreno; (ii) declividade constante do fundo do canal e; (iii) penalizações proporcionais ao desnível  $|C_f - C_t|$  ponderadas por fator aleatório  $P$ , possibilitando com isso certa diversidade populacional. As soluções geradas compõem a população inicial do algoritmo genético, garantindo cobertura do espaço de busca com rotas viáveis e diferenciadas entre si.

### Função Objetivo

A função objetivo calcula o custo total de movimentação de terra:

$$\Delta x = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (2)$$

$$C_{f,i+1} = C_{f,i} - s \times \Delta x \quad (3)$$

$$volume_i = |C_{f,i+1} - C_{t,i+1}| \times \Delta x \quad (4)$$

$$Custo\ Total = \sum_i \begin{cases} volume_i \times c_{corte}, & C_f < C_t \\ volume_i \times c_{aterro}, & C_f > C_t \end{cases} \quad (5)$$

Determinar o ponto de mínimo custo total expresso na função objetivo do modelo favorece rotas com volumes de movimentação reduzidos, consequentemente com menor custo de implantação.

### Operadores Genéticos

A seleção ocorre via torneio: entre  $T$  rotas escolhidas aleatoriamente, a de menor custo é selecionada. O cruzamento combina segmentos de duas rotas em um ponto intermediário. A mutação, aplicada com probabilidade  $\mu$ , altera pontos intermediários por vizinhos topograficamente viáveis. Esses operadores garantem evolução da população com diversidade e pressão seletiva controlada.

### Suavização

A suavização pós-otimização usa *splines* cúbicas para minimizar desvios e garantir viabilidade construtiva. A função de suavização é:

$$\min \sum_i [(x_i - \hat{x}_i)^2 + (y_i - \hat{y}_i)^2] + \lambda \sum_i \left( \frac{d^2 x_i}{dr^2} \right)^2 \quad (6)$$

Com curvatura  $\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

Restrições podem ser impostas ao raio mínimo de curvatura para segurança hidráulica e construtiva. Para o perfil longitudinal, a cota do fundo do canal  $C_f$  é expressa por:

$$C_f(r) = C_{f_{inicial}} - s \times r \quad (7)$$

Com volumes de corte e de aterro ao longo do eixo da rota estimados por:

$$V_{corte} = \sum_i \max(0, C_t - C_f) \times \Delta x \quad (8)$$

$$V_{aterro} = \sum_i \max(0, C_f - C_t) \times \Delta x \quad (9)$$

### *Representação do Terreno por Séries de Fourier Duplas*

A representação de superfícies topográficas por séries de Fourier bidimensionais é uma técnica poderosa da matemática aplicada, especialmente útil para suavização de dados, compressão ou aproximação funcional de um modelo de terreno discreto, como uma matriz de cotas  $Z(x, y)$ .

Essa técnica assume que a matriz de entrada é uniformemente espaçada – o que é verdade para o modelo adotado, dado o espaçamento de 90 m entre os pontos (caso do RSTM) e 12 m (caso da fonte de dados topográficos do RN) – e que o terreno pode ser descrito com base em **funções periódicas**. Mesmo que a superfície real não seja periódica, o uso de janela ou a periodicidade artificial (extensão do domínio) pode viabilizar sua aplicação.

A suavização do MDT consiste na filtragem de alta frequência, ou seja, na eliminação de harmônicos de alta ordem, o que é útil para atenuar ruídos ou inconsistências altimétricas locais sem alterar as tendências gerais de relevo. Assim, torna-se possível a interpolação contínua da superfície, pois após obter os coeficientes da série, pode-se avaliar  $Z(x, y)$  em qualquer ponto do plano contínuo. Por exemplo, pode-se interpolar cotas em pontos entre os nós da matriz original, comprimir e armazenar com poucos termos significativos da série informação sobre grandes áreas com alta fidelidade e baixo custo de armazenamento. Pode não ser recomendável o uso dessa técnica de maneira generalizada em se tratando de elaboração de Projeto Básico, menos ainda de Projeto Executivo de engenharia.

A representação permite descrever a superfície topográfica  $Z(x, y)$  como uma soma de funções senoidais e cossenoidais bidimensionais:

$$Z(x, y) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{m,n} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi ny}{L_y}\right) + B_{m,n} \cos\left(\frac{2\pi}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi ny}{L_y}\right) + \dots \quad (10)$$

Ou, na forma compacta complexa:

$$Z(x, y) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{m,n} e^{2\pi i \left(\frac{mx}{L_x} + \frac{ny}{L_y}\right)} \quad (11)$$

Onde:

$Z(x, y)$ : cota do terreno no ponto  $(x, y)$ ;

$A_{m,n}$  e  $B_{m,n}$ : coeficientes reais da expansão;

$C_{m,n}$ : coeficientes complexos (na forma exponencial);

$L_x$  e  $L_y$ : dimensões físicas da grade em  $x$  e  $y$ ;

$M$  e  $N$ : número máximo de harmônicos em cada direção.



### *Profundidade de equilíbrio*

A profundidade de equilíbrio é a profundidade  $h_b$  para a qual o volume de corte é igual ao volume de aterro em uma seção transversal do canal. Esse equilíbrio é desejável porque minimiza o volume total de material transportado, reduz custos com transporte e disposição de terra e facilita a execução da obra em campo. Para uma das formas mais comuns de geometria de seção transversal de canais, também adotada no presente artigo, a saber, a seção trapezoidal sendo:

$b$  = largura da base (fundo) do canal;

$z$  = inclinação dos taludes (1 vertical:  $z$  horizontal);

$B$  = largura do topo da seção de aterro (berma);

$\beta$  = inclinação do talude de aterro;

$h$  = profundidade da seção em corte ou aterro.

Para se encontrar o valor de  $h = h_b$  tal que a área de corte seja igual a área de aterro, dada uma seção com taludes e bermas, e base em nível do greide, a equação cúbica resultante pode ser expressa como:

$$ah_b^3 + bh_b^2 + ch_b + d = 0 \quad (12)$$

Com os coeficientes definidos em função da geometria do canal (inclinações, base, topo); parâmetros da seção composta; largura da plataforma, presença de bermas, e níveis de compensação. A equação cúbica é resolvida usando a fórmula de Cardano, que fornece raízes reais para equações do tipo:

$$h^3 + ph + q = 0 \quad (13)$$

A solução é obtida calculando-se  $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3$  e, dependendo do sinal de  $\Delta$ , as raízes serão reais ou complexas. A escolha recairá sobre a única raiz real positiva fisicamente viável.

### Integração do conceito à otimização da rota

A integração do conceito de profundidade de equilíbrio à determinação da rota pode ser feita adotando-se uma forma de penalização para decisões que tendem a afastar a profundidade executiva do canal do valor calculado para  $h_b$ . Para viabilizar adequadamente tal penalização adotou-se a representação analítica do terreno pela função contínua  $Z(x, y)$ , via séries de Fourier, permitindo calcular a cota do terreno em qualquer ponto ao longo da rota.

A operacionalização da penalidade pode encontrar alguma dificuldade, pois mesmo quando a geometria da seção de projeto do canal é totalmente simétrica e simplificada (sem berma, taludes iguais, etc.), nenhuma solução real positiva pode não ser encontrada para a profundidade de equilíbrio. Isso sugere que, com os parâmetros que estão sendo empregados: (i) a área de corte cresce mais rapidamente que a de aterro; (ii) não existe ponto  $h_b$  em que a área de corte nunca se iguale à área de aterro com a geometria imposta; e (iv) possivelmente, a base do canal está demasiada larga para permitir o equilíbrio.

Nesses casos, o equilíbrio pode ser viabilizado, por exemplo, conjunta ou isoladamente reduzindo a largura da base do canal; aumentando a inclinação dos taludes de aterro; ampliando a largura da berma no topo do aterro (quando insuficiente para permitir trânsito de equipamentos de manutenção), ou seja, genericamente, ajustando os parâmetros construtivos até que o equilíbrio seja possível.

### Definição do Greide do Canal

A linha do fundo do canal  $C_f(x)$  é definida como uma função linear com declividade constante  $s$ . Assim a profundidade em cada ponto  $(x, y)$  ao longo de uma trajetória qualquer é expressa como:

$$h(x) = Z(x, y) - C_f(x) \quad (14)$$

Comparar  $h(x)$  com a Profundidade de Equilíbrio  $h_b$  no ponto analisado resultará saber que, se  $h(x)$  for maior do que  $h_b$ , haverá predominância de corte, caso contrário, haverá predominância de aterro. A função de custos deve ser então construída de modo a penalizar trechos em que (i)  $|h - h_b|$  seja grande; (ii) situações em que não há equilíbrio de massa entre corte e aterro; (iii) descontinuidades construtivas entre seções consecutivas. Portanto, o algoritmo privilegiará caminhos em que o balanço corte/aterro seja mais próximo do ideal, gerando assim benefícios tais como, (i) redução dos custos totais de terraplenagem; (ii) rota mais estável e com menor impacto ambiental; (iii) melhoria da eficiência construtiva do canal e; (iv) otimização que leva em conta a realidade construtiva, e não apenas a topologia.

### *Sequência executiva do Modelo 2*

Apresentados os conceitos integrantes do Modelo 2, resume-se agora as etapas sequenciais de aplicação do mesmo:

ETAPA 1: Leitura e Suavização da Matriz de Cotas (MDT)

ETAPA 2: Cálculo da Profundidade de Equilíbrio  $h_b$

ETAPA 3: Geração de Rotas com Algoritmo A\*: Em cada iteração, expande-se a rota do ponto atual para seus vizinhos (8 direções). Para cada vizinho é calculado o custo de passagem valendo-se da mera diferença entre a cota de fundo do canal e a cota do terreno natural para estimar o custo da seção em corte ou em aterro. Para a tomada de decisão sobre a direção a ser seguida, agrega-se ao custo uma penalização por excesso de curvatura.

ETAPA 4: Geração da População Inicial para Algoritmo Genético: Adotou-se limites de curvatura horizontal máxima variando aleatoriamente entre 0,01 e 0,08, com peso de penalização também variando aleatoriamente entre 1.000 e 8.000. Com isso, obtém-se população inicial suficientemente diversificada, graças à diversidade de curvaturas e pesos, ou seja, compõe a população inicial rotas válidas e distintas, que passam por diferentes caminhos, todos interligando o ponto de captação com o ponto de entrega da água.

ETAPA 5: Algoritmo Genético: Composto basicamente por: (i) avaliação das rotas (fitness), em que cada rota recebe um custo total calculado que considera: comprimento; volume movimentado e custo de corte ou aterro; (ii) seleção, cruzamento e mutação: a melhor rota é preservada (elitismo) e novas rotas são geradas por: **Crossover**: mistura das partes de duas rotas e **Mutação**: substituição de um ponto intermediário por um vizinho; (iii) evolução por gerações: o processo é repetido por um número definido de gerações e a melhor rota final é retornada como solução ótima bruta.

ETAPA 6: Conforme visto, a Etapa 5 fornece uma solução bruta, topologicamente viável. A presente etapa aplica uma suavização matemática contínua garantindo: rotas com curvaturas menores (melhor desempenho construtivo e hidráulico) e transições suaves entre trechos (sem ângulos quebrados).

ETAPA 7: São apresentados os resultados e visualizações: (a) perfil longitudinal, ou seja, traçado do perfil do terreno e do fundo do canal ao longo da rota otimizada, com áreas de corte e de aterro destacadas com cores distintas; (b) Mapa de rota ótima, ou seja, trajetória do eixo do canal sobre a matriz topográfica.

### Modelo 3: Solução via Programação Dinâmica

A Programação Dinâmica é uma técnica usada para resolver problemas passo a passo, guardando os melhores resultados parciais para evitar refazer cálculos. Para o problema de determinação da rota ótima para um canal gravitatório com declividade de fundo constante (preestabelecida pelo projetista), essa técnica, conforme aqui aplicada, irá percorrer a matriz topográfica  $n \times m$  partindo do ponto de captação da água indo em busca do ponto de entrega. O deslocamento dar-se-á ponto a ponto segundo 8 direções (frente, trás, lados e diagonais). Obviamente que, em cada passo, o canal perde um pouco de altura devido à declividade. A decisão sobre para qual dos pontos adjacentes se dará o movimento é tomada escolhendo-se qual deles apresenta o menor custo, em termos de corte ou aterro.

Cada ponto da matriz topográfica é visitado, linha por linha, coluna por coluna, a partir do ponto inicial. Para cada um desses pontos, são verificados os 8 vizinhos em volta, para os quais se calcula o custo de transição. Para cada ponto é armazenado o custo de vir até ele, bem como a nova profundidade do canal nesse ponto. Portanto, o custo total para chegar até esse ponto é o custo de vir até o vizinho, mais o custo do passo atual. Assim, se esse novo caminho for mais econômico do que o que eu já tinha anotado, atualiza-se: (i) o menor custo até esse ponto; (ii) a profundidade da linha de fundo aqui; e (iii) o caminho precedente, ou seja, de onde se veio para se chegar até aquele ponto, possibilitando assim refazer a rota posteriormente.

Concluída a “visitação” a todos os pontos do mapa, o algoritmo parte do ponto de entrega da água (ponto final) até alcançar o ponto de captação (ponto inicial), seguindo os **predecessores** (quem veio antes), até reconstituir a rota ótima.

### Formulação matemática do problema

Conforme já mencionado, o objetivo principal consiste em minimizar o custo total de movimentação de terra (corte ou aterro), assegurando declividade longitudinal constante do canal ao longo de toda a extensão do traçado.

Sejam:

- $G = \{(i, j) \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$  o conjunto de células da malha;
- $Z(i, j) \in \mathbb{R}$  a cota do terreno no ponto  $(i, j)$ ;
- $H(i, j) \in \mathbb{R}$  a cota do fundo do canal nesse ponto;
- $C(i, j) \in \mathbb{R}^+$  o custo acumulado mínimo para atingir o ponto  $(i, j)$  a partir do ponto de origem.

Define-se uma célula (ponto) inicial  $(i_0, j_0)$ , com cota inicial do fundo do canal  $H(i_0, j_0) = h_0$ , e uma célula final  $(i_1, j_1)$  que representa o ponto de entrega.

A restrição de declividade do fundo do canal  $s$  consiste em mantê-la constante, ou seja, o valor de  $H(i, j)$  deve ser reduzido a cada transição de célula de acordo com a distância euclidiana  $d$  entre células adjacentes:

$$H(i, j) = H(i', j') - s \cdot d((i', j'), (i, j)) \quad (15)$$

$$d((i', j'), (i, j)) = \sqrt{(i - i')^2 + (j - j')^2} \quad (16)$$

Para cada transição de uma célula anterior  $(i', j')$  até a célula atual  $(i, j)$ , o custo incremental  $\Delta C$  depende da diferença entre o terreno e a linha de fundo:

$$\Delta C(i', j', i, j) = \begin{cases} (Z(i, j) - H(i, j)) \cdot c_{\text{corte}}, & \text{se } Z(i, j) > H(i, j) \\ (H(i, j) - Z(i, j)) \cdot c_{\text{aterro}}, & \text{se } Z(i, j) \leq H(i, j) \end{cases} \quad (17)$$



$\Delta C(i', j', i, j)$ : custo incremental da transição da célula anterior  $(i', j')$  para a atual  $(i, j)$ ;

$Z(i, j)$ : cota do terreno no ponto atual;

$H(i, j)$ : cota do fundo do canal no ponto atual;

$c_{corte}$ ,  $c_{aterro}$ : custos unitários de corte e aterro, respectivamente (foi adotada inicialmente a proporção de  $c_{corte} = 10 \times c_{aterro}$ ).

A matriz de custos acumulados  $C(i, j)$  é preenchida iterativamente, considerando para cada célula  $(i, j)$  todos os vizinhos  $(i', j') \in \mathcal{N}(i, j)$ , onde  $\mathcal{N}(i, j)$  representa a vizinhança de Moore (8 direções possíveis). A atualização segue:

$$C(i, j) = \min_{\{(i', j') \in \mathcal{N}(i, j)\}} \{ C(i', j') + \Delta C(i', j', i, j) \} \quad (18)$$

Após o preenchimento completo da matriz de custos acumulados  $C(i, j)$ , a rota hidráulica ótima  $\mathcal{P} = \{(i_k, j_k)\}_{k=0}^K$  que conecta o ponto inicial  $(i_0, j_0)$  ao ponto final  $(i_1, j_1)$ , é reconstruída retroativamente. Este processo parte do ponto de chegada  $(i_1, j_1)$  e, a cada passo, localiza o vizinho com menor custo acumulado:

$$(i_k, j_k) = \arg \min_{\{(i', j') \in \mathcal{N}(i_{k+1}, j_{k+1})\}} \{ C(i', j') \} \quad (19)$$

Onde:

$\mathcal{N}(i, j)$  representa o conjunto de vizinhos adjacentes de  $(i, j)$  na vizinhança de Moore (até 8 direções).

$C(i', j')$  é o custo acumulado mínimo de movimentação de terra até o ponto  $(i', j')$ .

$(i_k, j_k)$  é o ponto imediatamente anterior a  $(i_{k+1}, j_{k+1})$  na trajetória.

Portanto, em palavras, a equação acima indica que, a cada passo da reconstrução da rota, percorremos o caminho de volta, partindo do ponto final, e escolhemos como próximo ponto aquele vizinho que apresentou o menor custo total para se chegar até ali, partindo-se do ponto de captação. Assim, a trajetória ótima é montada ponto a ponto, em sentido reverso, até chegar ao ponto de origem (captação).

A execução desse procedimento algorítmico gerará como saída: o vetor de pontos  $\mathcal{P}$  descrevendo o traçado do canal; o custo total da rota e o custo total com corte e aterro separados (medido como simples diferença entre a cota do terreno natural e a cota do fundo do canal).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo apresentou uma formulação abrangente e inovadora para o problema do traçado econômico de canais abertos, com ênfase em três modelos computacionais: o algoritmo A\* modificado, os algoritmos genéticos e a programação dinâmica. Cada abordagem incorpora, com diferentes níveis de sofisticação, parâmetros hidráulicos, topográficos e construtivos, tendo como principal critério de otimização o custo total de movimentação de terra, dado pela diferença entre as cotas do fundo do canal e do terreno natural.

Destaca-se como contribuição relevante a introdução do conceito de profundidade de equilíbrio entre corte e aterro, que permite o balanceamento natural entre os volumes movimentados, minimizando o impacto ambiental e o custo operacional da obra. A representação topográfica por séries de Fourier mostrou-se eficaz tanto na suavização da superfície quanto na viabilização do cálculo contínuo de cotas — aspecto essencial para a inclusão de penalidades realistas na função objetivo..

Outro aspecto inovador foi a geração de população inicial para o modelo genético a partir de rotas produzidas com o algoritmo A\* com pesos de penalização variados, o que resultou em diversidade populacional significativa e, consequentemente, maior robustez no processo evolutivo.

As metodologias descritas estão plenamente aptas a serem aplicadas em estudos de viabilidade e anteprojeto de canais, oferecendo alternativas economicamente competitivas e aderentes às condições do terreno. A próxima etapa, descrita na Parte II, aplica os modelos desenvolvidos a casos reais, validando sua eficácia por meio de comparações com traçados executivos e concepções ainda em projeto.

## REFERÊNCIAS

- ADARSH, S.; SAHANA, A. S. (2013). "Optimal Design of Drainage Channels Using Probabilistic Search". International Journal of Civil Engineering Research. DOI: 10.1680/wama.12.00066.
- NIAZKAR, M.; AFZALI, M. (2015). "Optimization of Trapezoidal Channels Using Honey Bee Mating Optimization". Applied Soft Computing. DOI: 10.1007/s11269-015-0919-9.
- SALEM, H. A.; IMAM, Y. E.; GHANEM, A. M.; BAZARAA, A. S. (2022). "A Comprehensive Optimization Model for Open Channel Design". Water, 14(17), 2762.
- SARMENTO, F. J. (2008). "Otimização de Custos de Adução na Transposição do Rio São Francisco" in Anais do IX Simposio Brasileiro de Recursos Hídricos do Nordeste. Salvador – BA.
- SARMENTO, F. J. (2014a). "Metaheurística e Inteligência Artificial na Otimização do Traçado de Canais – Parte I: Aspectos Teóricos" in Anais do XII Simposio de Recursos Hídricos do Nordeste, Natal – RN.
- SARMENTO, F. J. (2014b). "Metaheurística e Inteligência Artificial na Otimização do Traçado de Canais – Parte II: Aplicação Prática", in Anais do XII Simposio de Recursos Hídricos do Nordeste, Natal – RN.
- SARMENTO, F. J. (2022). "Automatic routing of water supply pipelines". RBRH, 27. <https://doi.org/10.1590/2318-0331.272220220033>
- SARMENTO, F. J., MOLINAS, P.A. (2012). "Um Algoritmo Metaheurístico De Otimização Do Traçado De Canais", in Anais do XI Simposio de Recursos Hídricos do Nordeste, João Pessoa - PB.