

XI SIMPÓSIO DE RECURSOS HÍDRICOS DO NORDESTE

ANÁLISE DA BACIA HIDROGRÁFICA DO RIBEIRÃO MARMELO SOB O ENFOQUE DA GEOMETRIA FRACTAL

*Luísa Santana Marques¹; Samanta Ferreira Bortoni²
& Maria Helena Rodrigues Gomes³*

RESUMO - O presente trabalho faz uma análise de alguns dos diferentes métodos existentes para o cálculo da dimensão fractal. O conceito de fractal e de dimensão fractal foi difundido por Mandelbrot em 1983, com o intuito de estimar a complexidade de objetos que não se enquadravam na Geometria Euclidiana. Com base nessas informações, foi estudada a Bacia Hidrográfica do Ribeirão Marmelo através do manuseio do mapa da região com o auxílio de instrumentos de medida. Fazendo o uso de quatro métodos presentes na literatura: Razões de Horton, Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais, Método do Box-Counting e Método de Richardson, pôde-se estabelecer diferentes valores para a dimensão fractal da bacia em estudo. Mediante os resultados, pode-se afirmar que, apesar das variações encontradas para os valores de D_f , estes encontram-se dentro do previsto pela literatura, e portanto, redes de drenagem podem ser vistas como objetos fractais.

ABSTRACT – This paper makes an analysis of some of the different existing methods for the calculation of the fractal dimension. The concept of fractal and of fractal dimension was divulged by Mandelbrot in 1983 with the objective of estimating the complexity of objects that did not fit in Euclidean Geometry. Based on this information, the Bacia Ribeirão Marmelo was studied by handling the map of the region with the support of measuring instruments. Making use of four methods in the literature: Horton's Laws, Geometric Stream Length Exceedence Probabilily Distribution, the Box-Counting Method and Richardson's Method, different values for the fractal dimension of the watershed in the study were determined. From the results, it can be stated that, in spite of such variations in the values of D_f , these are within the predicted by the literature and therefore the drainage networks can be viewed as fractal objects.

PALAVRAS – CHAVES: dimensão fractal, redes de drenagem

¹ Aluna e bolsista de Iniciação Científica do Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora. luisa.marques@engenharia.ufjf.br

² Aluna e membro do Grupo de Educação Tutorial do Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora. samanta.bortoni@engenharia.ufjf.br

³ Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora, - 4ª Plataforma Setor de Tecnologia - Rua João Lourenço Kelmer s/n – Bairro Marmelo – CEP: 36036-900 - Juiz de Fora – MG – Brasil. Fone: (32) 3229-3419 ramal 21 - Fax: (32) 3229-3401; e-mail: mariahelena.gomes@ufjf.edu.br

INTRODUÇÃO

O conhecimento das características físicas de uma bacia hidrográfica constitui um elemento de grande importância, já que está intrinsecamente ligado ao comportamento hidrológico da rede de drenagem. Através do estabelecimento de comparações entre dados conhecidos e características físicas das bacias pode-se determinar planos e projetos, de maneira a contribuir e esclarecer a dinâmica ambiental (Villela et.al. (1975) apud Silveira (2006)).

Baseando-se na Teoria do Caos, Briggs et al. (1992) propõem que a natureza em sua criatividade apresenta padrões caóticos, exemplificados pelo seu comportamento complexo e instável. A palavra fractal, difundida por Mandelbrot (1977), descreve os objetos caóticos, com propriedades determinantes de complexidade infinita, auto-similaridade (uma parte do objeto pode ser vista como a réplica do todo, em uma escala menor) e auto-afinidade, tal como a rede de drenagem de uma bacia hidrográfica. Sendo assim, a dimensão fractal, utilizada para caracterizar descontinuidades na natureza que não se encaixam nas dimensões euclidianas, determina o quão irregular os objetos podem ser em diferentes escalas.

Atrelando conhecimentos de geometria fractal e conceitos de hidrologia básica pode-se avaliar com maior eficiência as características geomorfológicas de uma bacia hidrográfica, como por exemplo, a melhor caracterização das redes de drenagem ou até mesmo a associação da dimensão fractal à resposta hidrológica.

A Bacia do Ribeirão Marmelo, localizada na região do Complexo de Juiz de Fora, sob condições montanhosas e relevo mais acidentado em determinadas regiões, foi escolhida para o estudo visando à análise e comparação da dimensão fractal por métodos distintos e a consequente verificação das características geomorfológicas e hidrológicas da região.

SISTEMA DE HIERARQUIZAÇÃO DAS REDES DE DRENAGEM

O estudo da classificação das redes de drenagem teve como precursor Horton (1945) que quantificou os canais, classificando-os por ordem. Posteriormente, Strahler (1952) simplificou este método definindo que quando canais têm origem nas fontes são canais de primeira ordem; quando canais de ordens iguais X_N se unem formam um canal de ordem superior X_{N+1} ; quando canais de ordens diferentes se unem, prevalece a classificação do canal de maior ordem; e a ordem da rede de canais equivale à ordem mais alta do canal que a constitui. A Figura 1 mostra uma rede de drenagem segundo a classificação de Strahler (1952).

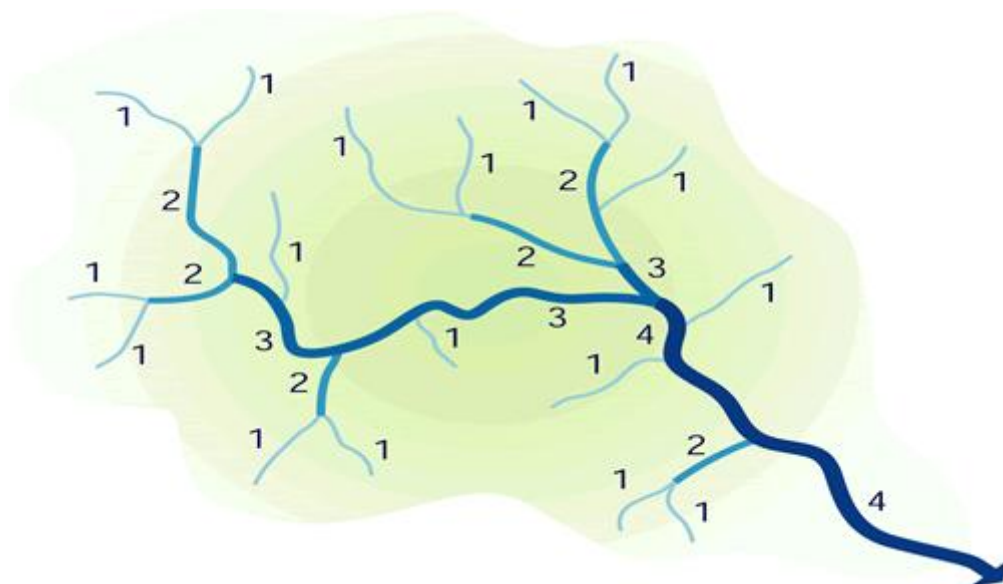


Figura 1: Classificação dos canais de uma rede de drenagem segundo Strahler
Imagem cortesia da FISRWG (Fonte: http://www.fgmorph.com/fg_4_8.php)

DIMENSÃO FRACTAL

Observa-se na geometria euclidiana clássica que a dimensão de um objeto é dada pelo número de coordenadas no espaço ocupadas pelo mesmo, sendo sempre um número inteiro. Segundo Mandelbrot (1977) apud Mendonça et. al. (2007) nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves e nem mesmo a luz caminha em linha reta. Com esse pensamento, Mandelbrot (1977) introduziu o conceito de fractais e o de dimensões fracionadas, possibilitando o estudo de objetos que não se enquadravam na geometria clássica por possuírem três características relevantes: auto-semelhança em diferentes níveis de escala, dimensão fractal e complexidade infinita (Gulick, 1992). A dimensão Hausdorff ou dimensão fractal caracteriza-se pela representação do nível de irregularidade ou complexidade de um determinado objeto em diversas escalas. Portanto, pode-se afirmar que a dimensão fractal é diretamente proporcional a complexidade do objeto.

Segundo Mandelbrot (1977) apud Gomes (1997) a dimensão fractal pode ser compreendida assumindo-se que para cobrir certo objeto no espaço n-dimensional, requer-se N_ϵ esferas n-dimensionais de diâmetros d . N_ϵ e d relacionam-se na seguinte equação:

$$N_\epsilon(d) \approx d^{-D} \quad (1)$$

Para Mandelbrot (1977) apud Silveira (2006) os fractais têm dimensão superior à sua dimensão euclidiana. Para Serra e Karas (1997) apud Silveira (2006), a dimensão fractal está relacionado com o espaço que o objeto fractal ocupa. Segundo Christofolletti & Christofolletti (1994) apud Gomes (1997) as dimensões fractais podem ser enquadradas em intervalos de acordo com o objeto em estudo. Valores entre 0 e 0,99 são característicos de estruturas com base em pontos, como por exemplo, fractais de séries temporais. Compreendidas entre os valores de 1,0 e 1,99 estão as curvas irregulares, como as tortuosidades e as sinuosidades das linhas costeiras e os meandros dos cursos fluviais. Valores de 2,0 a 2,99 representam as estruturas bidimensionais, tal como o do formato de bacias hidrográficas. Estruturas espaciais de representação volumétrica, como jazidas minerais ou volume de nuvens na atmosfera apresentam dimensões entre 3,0 e 3,99.

DIMENSÃO FRACTAL E AS LEIS DE HORTON

Além da classificação das redes de drenagem, Horton (1945) deduziu a Lei do Número de Canais (R_B) e a Lei do Comprimento dos Canais (R_L), representadas respectivamente pela estrutura geológica da rede e pela estrutura geométrica. Continuando o trabalho de Horton, Schumm (1956) apud Smart (1972) propôs a Lei da Área de Drenagem (R_A). As três leis descritas acima podem ser escritas no seguinte formato:

Lei do Número de Canais:

$$R_B \cong \frac{Nx_i - 1}{Nx_i} \quad (2)$$

Lei do Comprimento de Canais:

$$R_L \cong \frac{Lx_i}{Lx_{i-1}} \quad (3)$$

Lei da Área de Drenagem:

$$R_A \cong \frac{\bar{A}x_i}{\bar{A}x_{i-1}} \quad (4)$$

Segundo Strahler (1952) apud Araujo et al. (2011) os resultados encontrados devem pertencer a faixas de valores de 3 a 5; de 1,5 a 3,5; e de 3 a 6, para os valores de R_B , R_L e R_A , respectivamente.

Com o intuito de compreender a teoria quantitativa das redes de canais e estabelecer uma relação entre a dimensão fractal e as razões de Horton, vários estudos foram feitos com parâmetros que caracterizam as bacias hidrográficas. Para a determinação da dimensão fractal, La Barbera & Rosso (1987) consideraram as leis de número de canais e comprimento de canais invariáveis para diversas escalas. O cálculo da Dimensão Fractal pode ser obtido a partir das Leis de Horton segundo as equações:

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L}, R_B > R_L \quad (5)$$

$$D = 1, R_B \leq R_L \quad (6)$$

METODOLOGIA

No presente trabalho utilizaram-se três métodos propostos por Tarboton et al. (1988) para a determinação da dimensão fractal de redes de drenagem: método da distribuição da probabilidade de excedência do comprimento de canais, método “Box-Counting” desenvolvido por Goodchild (1982) apud Lovejoy et AL. (1987) e método de Richardson.

O Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais permite o cálculo da dimensão fractal em redes de drenagem através da utilização de um determinado instrumento de medida, a régua. Os canais são medidos um a um, de seu ponto inicial até o final e, posteriormente, ordenados de maneira decrescente.

Tarboton et al.(1988) apud Araujo et al. (2011) observaram que a probabilidade de ocorrência de r é proporcional a r^{-D} , denotando uma distribuição hiperbólica, escrita como:

$$p = \text{Prob} [\text{comprimento} > l] \approx l^{-D} \quad (7)$$

Onde D é a dimensão fractal e l é o comprimento dos canais.

A probabilidade de excedência é dada por:

$$P = \frac{\bar{m}}{n+1} \quad (8)$$

Onde m é a ordem de um canal em uma lista ordenada do mais longo ao mais curto e n é o número total de canais da rede de drenagem.

Mediante a construção de um gráfico da probabilidade de excedência P em função do comprimento dos canais l , pode-se obter a dimensão fractal, representada pelo coeficiente angular da reta.

O segundo método utilizado, o Box-Counting, consiste em cobrir toda a rede de drenagem com uma malha de quadrículas em diferentes escalas. A dimensão fractal é dada pela inclinação da reta obtida através do gráfico do número de quadrículas em função do tamanho das quadrículas.

O número de quadrículas $N(r)$ necessário para cobrir a rede de drenagem é dado pela seguinte equação:

$$N(r) \sim (1/r)^D \quad (9)$$

Este tipo de análise está baseado na definição de dimensão fractal dado por Hentschel & Procaccia (1983) apud Gomes (1997) como:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log r} \quad (10)$$

Onde m é o número de pontos do conjunto.

A dimensão fractal também foi determinada pela utilização do método de Richardson, no qual todos os canais da rede de drenagem são medidos em diferentes escalas com o auxílio de um instrumento de medida, o compasso. O comprimento aproximado é dado por $L = Nr$, onde N é o número de passos e r é o tamanho de cada passo. Para que aja uma maior exatidão devemos fazer com que $r \rightarrow 0$.

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} Nr \quad (11)$$

Relacionando o número de passos com o tamanho de cada passo, em um gráfico log-log, uma inclinação i é observada. A dimensão fractal é dada por:

$$L \approx r^{1-D} \quad (12)$$

ÁREA DE ESTUDO

A sub-bacia do Ribeirão Marmelo localiza-se no município de Juiz de Fora na Zona da Mata Mineira, especificamente no Complexo de Juiz de Fora, um dos dois domínios geológicos da região (PDJF, 1996). A Zona da Mata possui o relevo predominantemente montanhoso, com algumas regiões onduladas e de planícies, tornando a capacidade de uso da terra economicamente desfavorável. A região apresenta um clima tropical úmido, caracterizado por duas estações bem definidas: verão quente e úmido, e inverno frio e seco. Além disso, suas coberturas vegetais são do tipo: Floresta Atlântica, Cerrado e Campo Cerrado e o Campo Rupestre de Altitude.

O Ribeirão Marmelo pertence à bacia hidrográfica do rio Paraíba do Sul a qual possui uma importância estratégica devido a sua capacidade de abastecimento para os municípios mineiros compreendidos em seus limites e os Estados do Rio de Janeiro e São Paulo.

De acordo com Araujo et al. (2011), o Complexo Juiz de Fora possui grande extensão e é formado por rochas metamórficas antigas que foram sujeitas a vários processos de transformação geológicos. Acompanha todo o perímetro urbano onde estabelece uma relevante falha geológica regional. Esta falha constitui o *front* principal que durante a sua rigorosa formação gerou falhas de menor porte como, por exemplo, a que acompanha o vale do Ribeirão Marmelo responsável pela formação do vale do Rio Paraibuna, o principal rio do município. É uma região montanhosa com altitudes que variam aproximadamente entre 670m a 1000m, apresentando relevo mais acidentado com sua paisagem trabalhada pelos agentes erosivos.

RESULTADOS

De acordo com o sistema de hierarquização, a Bacia Hidrográfica do Ribeirão Marmelo apresentou grandeza de 4ª ordem.

Através dos dados obtidos a partir dos mapas fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (1981) na escala de 1:50.000, foram calculadas as Razões de Horton: Razões do Comprimento de Canais (R_L) e Razão do Número de Canais (R_B) que se encontram na Tabela 1. Fazendo uso da equação (5) foi determinada a dimensão fractal segundo as Razões de Horton representadas na Tabela 2.

Tabela 1: Dados e valores das Razões de Horton da Bacia do Ribeirão Marmelo

Ordem dos Canais	Nº de Canais	Comprimento (m)	Comprimento Médio (m)	Razões de Horton
1	102	54550	534,80	Razão do Comprimento de Canais R_L 2,93
2	22	20050	911,36	
3	5	8675	1735	Razão do Número de Canais R_B 4,68
4	1	9000	9000	

Os valores obtidos para R_B e R_L confirmam os limites estabelecidos na literatura por Strahler (1952). A dimensão fractal de bacias hidrográficas naturais pode fugir as estimativas como pode ser observado na Figura 2, pois a dimensão fractal não tende a um valor constante, apesar de estar confinada entre 1,5 e 2 de acordo com La Barbera & Rosso (1989) apud Araujo et al. (2011). O grau de complexidade encontrado para o Ribeirão de Marmelo apresenta-se um pouco abaixo do esperado. O mesmo pode ser observado na Figura 2 onde algumas bacias americanas possuem valores para D_f um pouco maiores que 2 e outras valores entre 1 e 1,5.

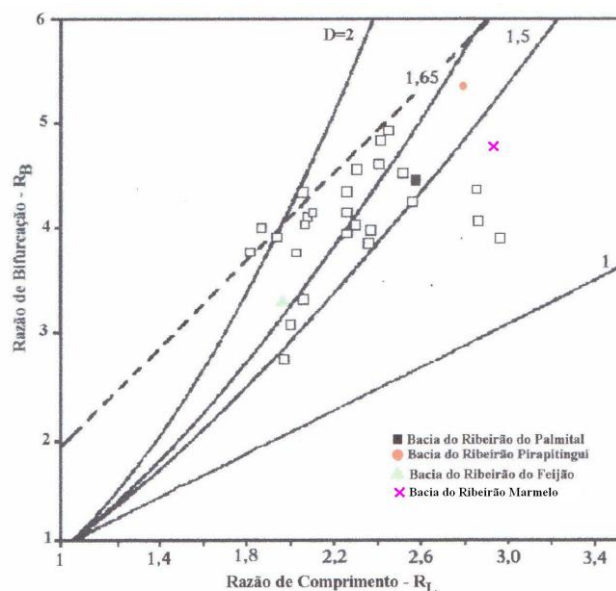
Figura2: Análise dos valores de R_B e R_L (Araujo et al., 2011)

Tabela 2: Dimensão fractal determinada através das Razões de Horton

Bacia Hidrográfica	Dimensão fractal
Ribeirão Marmelo	1,44
Ribeirão de Palmital*	1,56
Ribeirão do Pirapitingui*	1,71
Ribeirão do Feijão*	1,97

*Fonte: Gomes (1997)

A dimensão fractal também foi determinada através de métodos gráficos: Método da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais (Figura 3), Método de Box-Conting (Figura 4) e Método de Richardson (Figura 5), por meio das equações (7), (9) e (12), respectivamente.

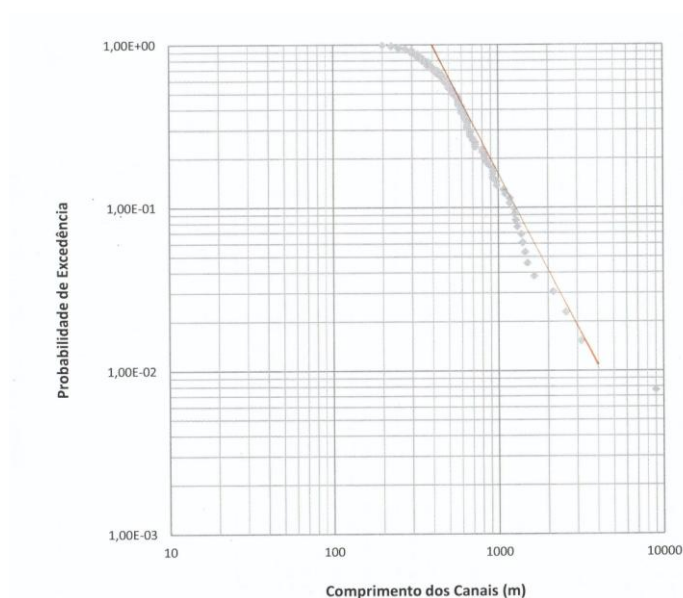


Figura 3 – Dimensão fractal obtida pelo Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão Marmelo

Observa-se que o valor encontrado para a dimensão D_f pertence a faixa de valores encontrados por Gomes (1997), La Barbera & Rosso (1989) e Tarboton et al. (1988).

Tabela 3: Dimensão fractal determinada pelo Método da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais

Bacias Hidrográficas	Dimensão fractal
Ribeirão Marmelo	2,01
Ribeirão de Palmital*	1,97
Ribeirão de Pirapitingui*	1,95
Ribeirão do Feijó*	1,83

*Fonte: Gomes (1997)

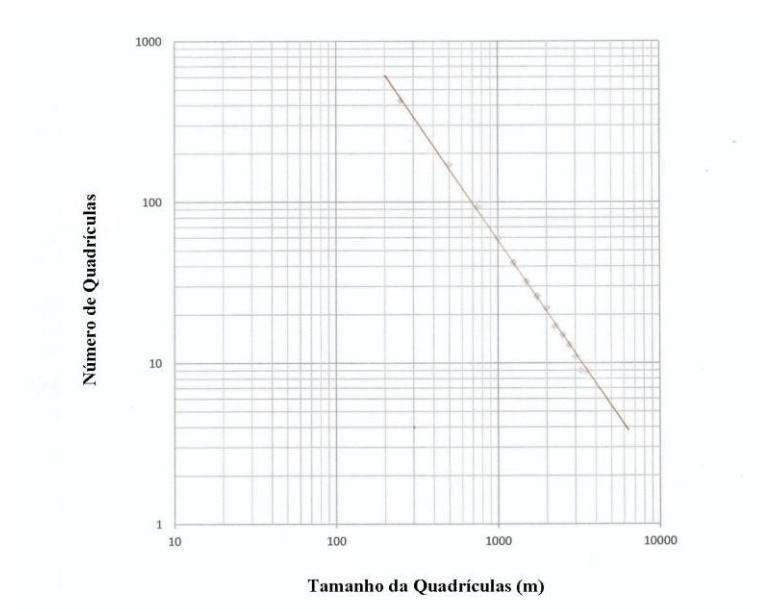


Figura 4 – Dimensão fractal obtida pelo Método do Box-counting para a Bacia do Ribeirão Marmelo

A dimensão fractal encontrada para o Ribeirão Marmelo foi de 2,16 confirmando a literatura, segundo a qual Christofolletti & Christofolletti (1994) apud Araujo et al. (2011) afirmaram que estruturas espaciais de representação bidimensional de uma superfície irregular tais como o formato de bacias hidrográficas apresenta Df entre 2 e 2,99.

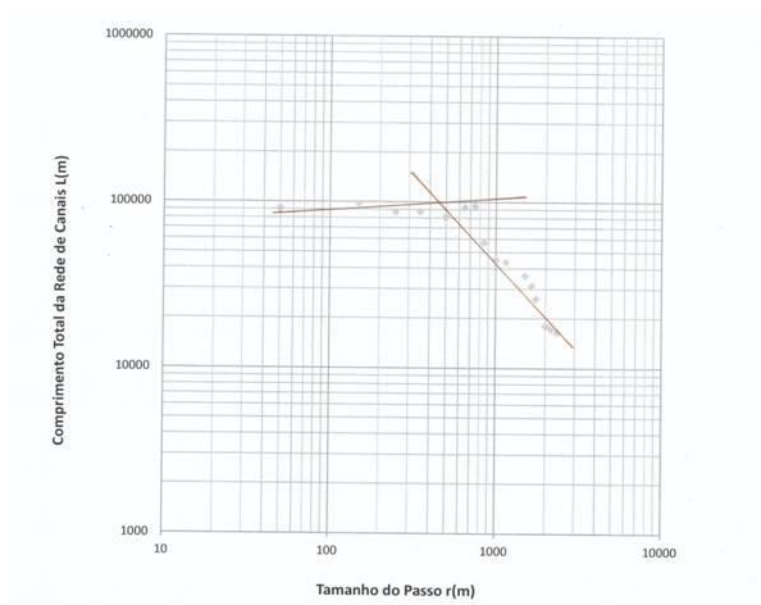


Figura 5 – Dimensão fractal obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão Marmelo

Para o método de Richardson foi encontrado o valor da dimensão fractal D_f pertinente a literatura, o qual foi comparado, na Tabela 5, com os valores obtidos por Gomes (1997) em sua análise de bacias hidrográficas brasileiras.

Tabela 5: Dimensão fractal determinada pelo Método de Richardson	
Bacias Hidrográficas	Dimensão fractal
Ribeirão Marmelo	1,71
Ribeirão de Palmital*	1,97
Ribeirão de Pirapitingui*	1,98
Ribeirão do Feijó*	1,78

*Fonte: Gomes (1997)

CONCLUSÃO

Mediante a análise dos quatro métodos utilizados, pode-se observar que os valores da dimensão fractal para a bacia do Ribeirão Marmelo estão entre 1,5 e 2, apresentando alguns pontos flutuantes. Entretanto, estes pontos encontram-se no limiar da faixa de valores citados na literatura e podem ser justificados devido às características heterogêneas da bacia.

Todos os métodos adotados neste trabalho baseiam-se em medidas de comprimento, porém são distintos, não podendo ser comparados entre si, inviabilizando a escolha do mais preciso. Mesmo assim, os resultados obtidos demonstram que a bacia hidrográfica possui um padrão de ramificação que cobre toda a área de drenagem, confirmando o pressuposto de Tarboton et al. (1988) de que as redes de drenagem podem ser vistas como objetos fractais.

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem ao Núcleo de Análise Geo-Ambiental do Departamento de Transporte da Faculdade de Engenharia da UFJF pelos mapas e informações fornecidos para a elaboração deste trabalho. A Pró-Reitoria de Pesquisa da UFJF, pela bolsa de iniciação científica concedida. A FAPEMIG pelo auxílio recebido para participação nesse evento.

BIBLIOGRAFIA

ARAUJO, C. S.; MARQUES, L. S.; BORTONI, S. F.; SILVEIRA, V. A.; GOMES, M. H. R. (2011) “*Determinação da dimensão fractal de uma rede de drenagem brasileira.*” in Congresso Nacional Del Agua Chaco, Resistencia.

BRIGGS, J. (1992). “*Fractals: The Patterns of Chaos*”. New York: Touchstone.

GOMES, M. H. R. (1997). “*Análise Fractal de Redes de Canais de Bacias hidrográficas na Escala 1:50.000.*” São Paulo. 83f. Escola de Engenharia de São Carlos. USP.

GOMES, M. H. R.; Chaudhry, F. H. (1997). “*Análise Fractal de Redes de Drenagem de Bacias Hidrográficas*”. XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. Universidade São Paulo - USP. p. 20-24.

GULICK, D. (1992). “*Encounters with Chaos*”, McGraw-Hill International Editions – Mathematics and Statistics Series, 1992.

HORTON, R. E. (1945). “*Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology*”. Bulletin of the Geological Society of America. v. 56, p. 275-370.

KOBIYAMA, M e BUENO JUNIOR, J. (2002) “*Multifractal Characteristics of Drainage Network of Marumbi River Watershed, Paraná State*”. In: XXXI Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola – CONBEA, Salvador/BA. Anais

- LA BARBERA, P. e ROSSO, R. (1989). “*On Fractal Dimension of Stream Networks.*” Water Resources Research, Washington. v. 25, n. 4, p.753-741.
- LOVEJOY, S.; SCHERTZER, D.; TSONIS, A. A. “*Functional Box-Counting and Multiple Elliptical Dimensions in Rain.*” Science, nº 235. Pág. 1036-1038.
- MANDELBROT, B. B. (1997). “*Fractals: Form, Chance and Dimension.*” Freeman and Company. New York.
- PREFEITURA MUNICIPAL DE JUIZ DE FORA (1996) “*Plano Diretor de Juiz de Fora. Diagnóstico*”, v.1. Instituto de Pesquisa e Planejamento da Prefeitura Municipal de Juiz de Fora.
- ROSSO, R.; BACCHI, B.; BARBERA, P. (1991). “*Fractal Relation of Mainstream Length to Catchment Area in River Networks*”. Water Resources Research, v. 27, n. 3. p. 381-387.
- SILVEIRA, N. F. Q. (2006) “*Análise fractal de bacias hidrográficas de região de encosta e região de planalto com base em cartas topográficas e em fotografias aéreas.*” Florianópolis – Santa Catarina. 191f. Universidade Federal de Santa Catarina.
- SMART, J. S. (1972). “*Channel networks*”. Advances in Hydroscience. Washington. v. 8. p. 305-346
- SCHUCH, F. S. e LOCH, C. (2011). “*Aplicação da tecnologia LIDAR para a determinação do padrão fractal de rede de drenagem.*” Anais XV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto - SBSR, Curitiba, PR, Brasil, INPE p.1240
- STRAHLER, A. N. (1952). “*Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography.*” Bulletin of the Geological Society of America. v. 63, p.1117-1121.
- TARBOTON, D. G.; BRAS, R. L.; ITURBE, I. R. (1988). “*The Fractal Nature of Networks*”. Water Resources Research. v. 24, n. 8. p. 1317-1322.
- VESTENA, L. R. e KOBAYAMA, M. (2010). “*A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner - SC.*” Revista Árvore, Viçosa-MG, v.34, n.4, p.661 - 668
- ZĂVOIANU, I. (1985) “*Morphometry of drainage basins.*” New York: Elsevier Science Publisher.