APLICAÇÃO DO MÉTODO DE MacCORMAC NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICHARDSON EM SOLOS NÃO SATURADOS

Francisco de Assis de Souza Filho[1,2] & Rubem L.L. Porto[2]

Resumo - Este trabalho apresenta a resolução do modelo MacCORMAC na solução da equação de Richardson em solos não saturados. Os resultados obtidos são satisfatórios.

Abstract - This work introduces MacCORMAC model in the solution of the equation of Richardson in not saturated soils. The obtained results are satisfactory.

INTRODUÇÃO

A infiltração de água no solo é um componente do ciclo hidrológico de fundamental importância. Estão vinculados a este fenômeno questões variadas como a determinação do deflúvio superficial e o suprimento de água da estrutura reticular das plantas, fomentando o interesse de diversas áreas da ciência e da técnica neste fenômeno.

A equação diferencial de Richardson descreve o escoamento de água no meio não saturado. O trabalho aqui apresentado tem como objetivo apresentar a discretização de MacCormack para a resolução numérica da equação de Richardson.

O cálculo numérico da equação de Richardson foi feito utilizando o método explícito de diferenças finitas de MacCormack. Este método foi proposto inicialmente para o cálculo da onda de choque de explosões em fluidos incompressivos. Implemetaram-se algumas aplicações deste método na hidráulica, especificamnente na resolução das equações de Saint-Venant.

A aplicação descrita neste trabalho diferencia-se das anteriores, no domínio da hidráulica, devido a nessecidade de tratatar o termo de derivada segunda da equação de Richardson, termo este que não encontra similar na equação de Saint-Venant e a forte não linearidade da equação de Richardson imposta pelo termo de difusão. Sendo o tratamento destes termos a contribuição

[1] Fundação Cearense de Meteorologia e Recursos Hídricos. assisfilho@seccrel.com.br. (85)4331803
[2] Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia Hidráulica e Sanitária - Av. Prof. Almeida Prado, 271 – Trav. 3 - Cidade Universitária - São Paulo – Brasil - CEP: 05508-900 - Tel: (11) 3091 5403 assisfilho@secrel.com.br, rlporto@usp.br;

numérica para as aplicações do método de MacComarck na hidráulica dos escoamentos em meio não saturado.

A solução numérica determinou a capacidade de infiltração, o perfil de umidade e o perfil da carga matricial para um escoamento unidimensional, possibilitando o cálculo do avanço da frente de umidade. Esta metodologia é similar a apresentada por Peyret e Taylor(1983) para uma onda de pressão de gás devido uma explosão.

Este texto tem como finalidade apresentar o desenvolvimento numérico em um problema unidimensional de contorno simples com vistas a apresentação da metodologia.

METODOLOGIA

A equação de escoamento não-saturado

O escoamento não saturado é descrito pela equação diferencial de Richardson. Esta equação é obtida a partir do princípio da conservação da massa e da equação de fluxo de Darcy (equação da quantidade de movimento). A equação de Richardson pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} + K \right) \qquad (1)$$

onde: θ é o teor de umidade no solo; D é a difusão e K é a condutividade hidráulica no solo.

Condutividade e difusividade hidráulica

A condutividade hidráulica do solo não saturado pode ser descrita por :

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta}{\theta_S} \right)^{2b+3} \qquad (2)$$

onde: θ_S é o teor de umidade máximo no solo; b é a declividade da curva de retenção em papel Log x Log e K_S é a condutividade hidráulica do solo ssaturado.

A sucção matricial (ψ) é descrita como uma função do teor de umidade pela expressão de Broks-Corey (equ.3).

$$\psi(\theta) = \psi_e \left(\frac{\theta}{\theta_S} \right)^{-b} \qquad (3)$$

ψ_e tem seu valor definido no ajuste desta equação.

As equações (2) e (3) fornecem uma equação para a difusividade descrita pela equação:

$$D(\theta) = bK_S\left(\frac{\psi_e}{\theta_s}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_S}\right)^{b+2} \tag{4}$$

A discretização da equação pelo método de MacCormack

O algoritmo de MacCormack é um método de diferenças finitas explícito. Este método consiste no cálculo das variáveis em dois passos, o primeiro preditor e o segundo o corretor.

A aplicação do algoritimo nessecita escrever a equação de Richardson na forma conservativa, isto é na forma:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial x} \tag{5}$$

sendo G uma função de θ, descrita por:

$$G = \left(D\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + K \right) \tag{6}$$

A discretização da equ.5 é similar ao realizado para a equação de Saint-Venant. O cálculo de θ na equ. 5 é feito pelo método preditor-coretor de MacCormack como:

Passo Preditor:

$$\theta_i^* = (1-\beta)\theta_i^n + \beta\theta_{i+1}^n - \alpha\,\frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{i+1}^n - G_i^n) \tag{7}$$

Passo Corretor:

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n - \frac{\Delta t}{2\alpha\Delta x}[(\alpha-\beta)G_{i+1}^n + (2\beta-1)G_i^n + (1-\alpha-\beta)G_{i-1}^n + G_i^* - G_{i-1}^*] \tag{8}$$

A função G é uma função extremamente não linear com variação temporal e espacial e contem um termo de derivada parcial.

O cálculo de G e G^* é feito, a partir de um paralelo com a aplicação de Peyret & Taylor(1983) do método S_α^β, pelas expressões abaixo:

$$G_i^n \equiv \theta_i^n - \frac{M_i^n}{\Delta x}[(\theta_i^n - \theta_{i-1}^n) + y(\theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n)] \tag{9}$$

$$G_i^* \equiv \theta_i^* - \frac{M_i^*}{\Delta x}[(\theta_i^{*-}\theta_{i-1}^*) + [\alpha + (1-2\alpha)y](\theta_{i+1}^* - 2\theta_i^* + \theta_{i-1}^*)] \tag{10}$$

onde M_i^n e M_i^* são as ponderações do termo de difusão. Esta ponderação é descrita pela equ.10a,b; nesta equação para o algortmo de MacCormack tem-se:m_1=m_{-1}^*=0; m_{-1}=m_1^*= m_0=m_0^*=0,5.

Viscosidade Artificial

O conceito de viscosidade artificial foi utilizado motivado pelo surgimento de oscilações numéricas características a este método como uma "damping function". A formulação utilizada foi a desenvolvida por Lax-Wendroff na forma descrita por Peyret e Taylor(1982); isto é, soma-se ao passo corretor a expressão $(\Delta t/\Delta x)Z_i$.

Modelagem numérica dos contornos

-contorno da superfície do solo

Admitiu-se a hipótese de Dirichelet (a variável é conhecida no contorno) para o contorno. O contorno de Dirichelet é de definição imediata, bastando para a sua caracterização nomear o valor do teor de umidade na superfície. Este contorno foi utilizado na suposição de uma inundação da superfície.

-contorno interior

O contorno do limite inferior do domínio de cálculo foi modelado supondo escoamento nulo. Para este fim definiu-se que as umidades nos nós de contorno NX e NX-1 eram iguais.

RESULTADOS

Os resultados apresentados neste trabalho são a simulação do avanço de uma frente de umidade a partir da inundação da superfície do solo. As características dos solos utilizada foram:

POROSIDADE	0.417
CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA SATURADO	0.02 cm/s
SUÇÃO (ψ)	0.18cm

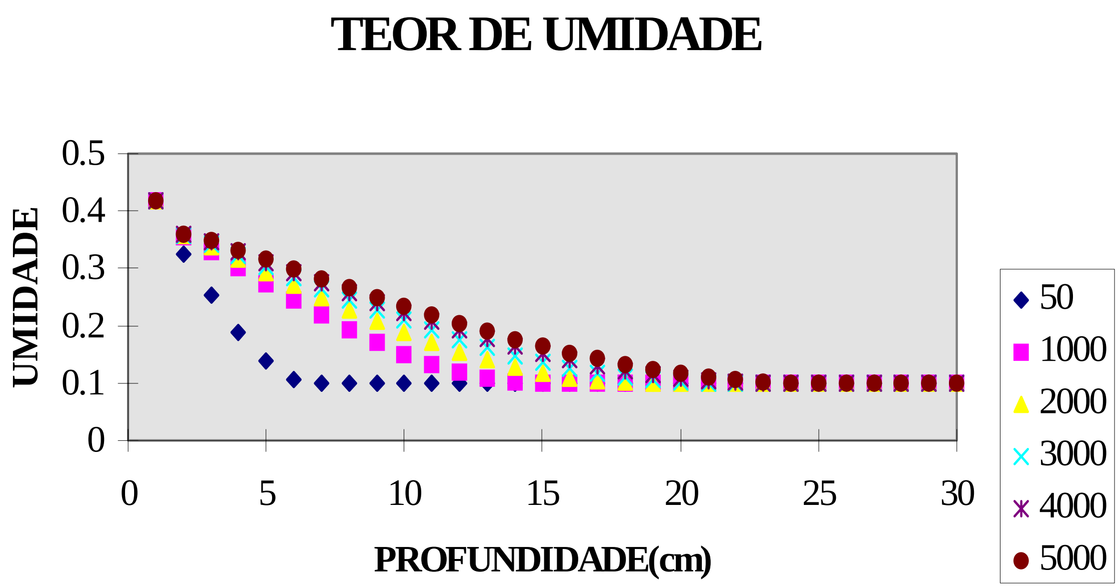

Figura 1: ***Perfil de teor de umidade***

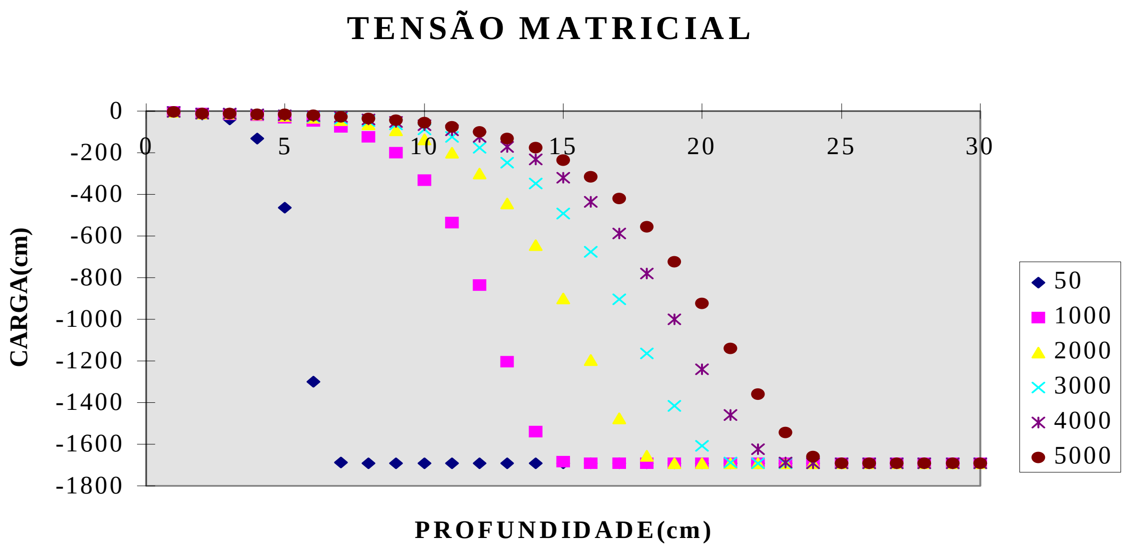

Figura 2: ***Perfil da tensão matricial***

Análise da estabilidade numérica do Esquema

As equações encontradas pelo autor na literatura que caracterizavam a estabilidade do esquema de MacCormack, na forma descrita neste trabalho, não se mostraram razoáveis para a determinação do limite de estabilidade nas simulações realizadas na construção deste trabalho. Reputamos este fato a forte não linearidade do termo de difusão que descaracteriza por completo as linearizações sempre feitas para a análise de estabilidade.

A determinação das condições de estabilidade foram detectadas no processo de simulação. A estabilidade esta vinculada a necessidade de se utilizar a viscosidade numérica e as dimnsoes da malha espaço-tempo que devem ter a razão de seus incrementos menor que três. Enfatiza-se que esta regra é uma generalização das simulações realizadas e como tal não tem a universalidade das soluções analíticas entando presa ao conjunto amostral de que derivou.

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Estão sendo feitos estudos com os objetivos de construir este algoritmo em duas dimensões, utilizar como variável na implementar o MacCormack a sucção matricial e implementar o contorno de Von Newman no equacionamento presente.

Os resultados preliminares mostram a potencialidade do método associado a simplicidade numérica. A simplicisade numérica desta formulação explícita possibilita a implemetação de um modelo com fronteira móvel para a frente de umidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Peyret,R e Taylor, T.D. C*omputational Metthods for fluid flow* Springer-Verlag New York Inc, 1983