

APLICAÇÃO DO MÉTODO ITERATIVO DE SEITELMAN-KATZENELSON EM ANÁLISE DE REDES HIDRÁULICAS

Flávio Cipparrone¹ & André T. Carvalho²

Resumo - A qualidade de um algoritmo na solução de redes hidráulicas pode ser avaliada segundo sua capacidade de convergir para uma solução com certo grau de precisão dentro de um tempo mínimo. No entanto, tradicionalmente, os algoritmos para a análise de redes hidráulicas têm sido avaliados *empiricamente* quanto a suas propriedades de convergência. Neste trabalho apresenta-se uma aplicação do método iterativo de Seitzman-Katzenelson para análise de redes hidráulicas. O método possui uma prova matemática de convergência monotônica para a solução da rede independentemente do ponto de partida. A solução é obtida através da análise do circuito elétrico análogo. Uma abordagem restrita ao domínio hidráulico é também indicada.

Abstract - The quality of an algorithm to solve hydraulic networks can be valued by its might to converge to a solution with some degree of accuracy and inside minimal time. However, traditionally, the algorithms for hydraulic network analysis have been *empirically* valued about convergence properties. In this work is presented an application of Seitzman-Katzenelson's iterative method at the analysis of hydraulic networks. The method has a mathematical proof of monotonically convergence to the network's solution, independently of the start point. The solution is obtained through the analysis of the analog electrical circuit. An restrict approach to the hydraulic domain is also presented.

Palavras-chave - redes hidráulicas, análise, método iterativo.

¹ Flávio Cipparrone, Ph. D.- Professor do Departamento de Sistemas Eletrônicos e Coordenador do Núcleo de Estudos de Otimização, PSI, POLI-USP. Av. Prof. Luciano Gualberto, travessa 3, 158. Cidade Universitária - São Paulo – SP, CEP 05508-900. Fone: 3091 – 5132. E-mail: flavio@lps.usp.br.

² André T. Carvalho - Aluno do Mestrando em Engenharia de Sistemas Eletrônicos. Núcleo de Estudos de Otimização, PSI, POLI-USP. Av. Prof. Luciano Gualberto, travessa 3, 158. Cidade Universitária - São Paulo – SP, CEP 05508-900. Fone: 3872 – 9855. E-mail: andre_tcarvalho@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

A análise em regime permanente das vazões e pressões em redes hidráulicas é um problema da mais alta importância em engenharia. Para tanto, muitos algoritmos e métodos computacionais foram propostos nas últimas décadas [5,7,8,9,10,11], de modo que já existem atualmente diversos softwares comerciais que se propõem fornecer computacionalmente tais resultados.

A solução para as vazões e pressões em uma rede hidráulica é obtida quando são satisfeitas as equações de continuidade do fluxo e de conservação da energia ao longo de toda a rede. As equações de continuidade do fluxo são equações algébricas lineares obtidas para cada junção ou nó da rede, ao passo que as equações de conservação da energia (obtidas para laços da rede) são, em geral, equações algébricas não-lineares. Até o presente não existem métodos para a solução direta e simultânea dessas equações. Faz-se, portanto, necessária uma abordagem numérica do problema, na qual uma solução inicial é arbitrada (geralmente satisfazendo as equações de continuidade) e, em seguida, iterativamente corrigida até que o sistema seja globalmente satisfeito.

Vários algoritmos numéricos foram propostos para resolver sistemas de equações não – lineares em redes hidráulicas, dentre os quais figuram principalmente: Hardy-Cross – um dos primeiros métodos de solução, tradicionalmente utilizado, proposto por Cross em 1936 [8]; Newton-Raphson – proposto por Martin e Peters em 1963 [9]; o método linear – explorado por Wood e Charles em 1972 [5]; e mais recentemente o método do gradiente, proposto por Todini e Pilati em 1988 [10]. Outras abordagens de solução de redes foram paralelamente propostas utilizando a teoria da otimização [7,11].

A qualidade de um algoritmo iterativo na solução de redes hidráulicas pode ser avaliada segundo sua capacidade de convergir para uma solução com certo grau de precisão no menor tempo possível. A convergência, na maioria desses algoritmos, de acordo com Wood [4], é fortemente restringida pela dimensão e topologia da rede, pela natureza de seus elementos e fundamentalmente pela solução inicial arbitrada.

No entanto, a partir do trabalho publicado por Wood em 1981, tradicionalmente os algoritmos para a análise de redes hidráulicas têm sido avaliados *empiricamente* quanto a suas propriedades de convergência.

Nesse artigo proporemos a solução do problema de análise de redes hidráulicas em regime permanente através da aplicação do método iterativo proposto por Seitzman e Katzenelson [1] em 1966 para solução de redes elétricas compostas por resistores de característica não-linear monotonamente crescente. O método de Seitzman-Katzenelson possui como característica diferencial uma *prova matemática de convergência monotônica para a solução da rede, independentemente da solução inicial arbitrada*.

Nas seções seguintes, apresentaremos uma modelagem matemática de redes hidráulicas a partir de sua analogia elétrica, a fim de descreveremos o método de Seitzman-Katzenelson e sua aplicabilidade na solução de redes hidráulicas. Finalmente ilustraremos o método com a solução de um exemplo, e apresentaremos algumas conclusões pertinentes a sua utilização.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Consideraremos em nossa análise redes hidráulicas contendo tubos, bombas, reservatórios, pontos de consumo e válvulas de retenção.

O método de Seitzman-Katzenelson para solução de circuitos elétricos não lineares baseia-se na análise dos conjuntos fundamentais de corte da rede. A extensão direta do método ao problema hidráulico requereria, portanto, uma modificação na representação topológica tradicional de redes hidráulicas. Essa modificação implicaria na adição de um nó imaginário de referência, o qual se conectaria: aos reservatórios, através de ramos com diferença de carga constante; e aos pontos de consumo, através de ramos de vazão constante. Uma representação semelhante foi proposta por Collins et al. Em 1978 [7] para a análise da rede como um problema de otimização.

Entretanto, optamos por trabalhar com uma analogia elétrica, consoante a formulação original do método empregada por seus autores. Prosseguiremos com a introdução da analogia elétrica antes de apresentar o método de Seitzman-Katzenelson.

Analogia Elétrica para Redes Hidráulicas em Regime Permanente

Sistemas físicos são ditos análogos quando, apesar da diversidade dos fenômenos que comportam, podem ser descritos por equações matemáticas semelhantes. Uma rede hidráulica em regime permanente pode ser representada analogamente por um circuito elétrico de corrente contínua, composto por fontes de tensão, fontes de corrente e resistores não-lineares. Na passagem da rede hidráulica ao seu circuito análogo, a carga e a vazão assumem respectivamente os papéis de tensão e corrente elétricas, e as equações da continuidade e da conservação da energia são representadas respectivamente pela primeira e segunda Leis de Kirchhoff.

Para obter o circuito elétrico análogo de uma rede hidráulica observa-se o seguinte procedimento:

1. Mantendo a *topologia original da rede*, adiciona-se ao modelo do circuito um *nó de referência*;
2. Para cada *reservatório*, adiciona-se ao circuito um *gerador de tensão* de valor igual à carga do reservatório entre o nó de referência e o nó do reservatório;

3. Para cada *drenagem de consumo*, adiciona-se ao circuito uma *fonte de corrente* de valor igual à vazão drenada entre o nó do ponto de consumo e o nó de referência;
4. Para cada *bomba*, adiciona-se ao circuito uma *fonte de tensão em série com um resistor não linear* a modo de obter uma curva quadrática, de acordo com o modelo consagrado na literatura;
5. Para cada *válvula de retenção*, adicione ao circuito um *diodo*;
6. Para cada *tubo*, adicione um *resistor não-linear*.

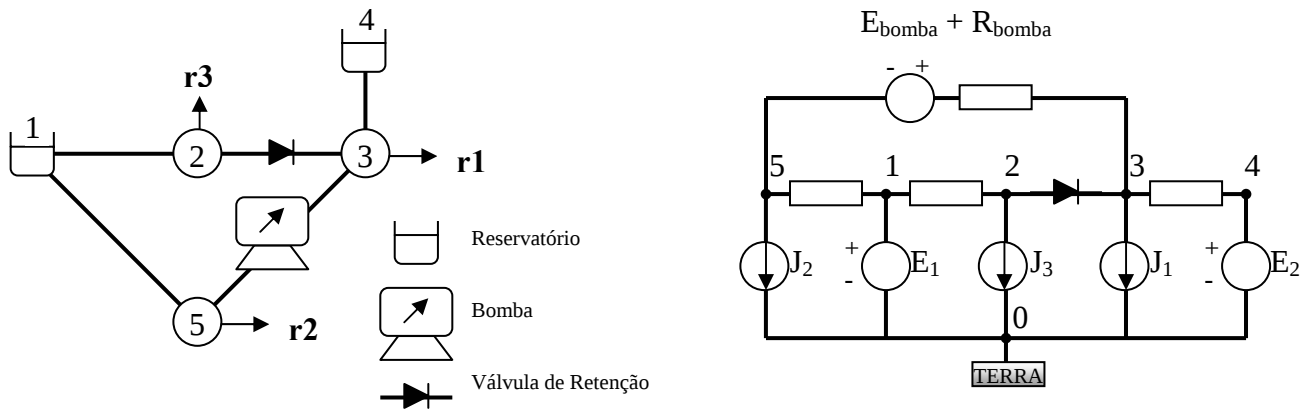


Figura 1 – Analogia elétrica de uma rede hidráulica.

A Figura 1 ilustra a obtenção de um circuito elétrico análogo para uma rede hidráulica elementar.

Desse ponto em diante, prosseguiremos com a análise do circuito elétrico análogo, resolveremos a rede no domínio elétrico e retornaremos a solução ao domínio hidráulico.

Requisitos Topológicos da Rede Elétrica Equivalente

Seja uma rede η inseparável composta por fontes independentes e resistores não lineares. Assume-se de antemão que η satisfaz os seguintes requisitos: (1) não existem laços formados por apenas fontes de tensão, nem tampouco conjuntos de corte contendo apenas fontes de corrente; (2) e a característica corrente-tensão de cada resistor r_k pode ser representada por uma função g_k , na qual $i_k = g_k(v_k)$, onde i_k e v_k são respectivamente a corrente e a tensão no resistor r_k .

As funções g_k por hipótese satisfazem a seguinte condição: para cada k , existem constantes $\bar{g}_k$ e $\underline{g}_k$, com $\underline{g}_k > 0$, tais que para quaisquer dois números v_k e v'_k , com $v_k > v'_k$:

$$\underline{g}_k(v_k - v'_k) \leq g_k(v_k) - g_k(v'_k) \leq \bar{g}_k(v_k - v'_k). \quad (1)$$

Note que essa condição implica que g_k é uma função contínua, bijetora, monotonicamente crescente que mapeia todo o eixo real nele mesmo, e que tanto g_k quanto sua inversa satisfazem as condições de Lipschitz.

Uma solução da rede η é definida como sendo qualquer conjunto de tensões e correntes que satisfaçam as leis de Kirchhoff e as relações constitutivas de seus elementos. Segue do trabalho de Duffin [2] que, de acordo com a escolha dos valores das fontes, a rede η possui uma solução única.

Convém salientar que as condições assumidas acima para a características dos resistores (tubos no domínio da hidráulica) valem particularmente para o caso em que $i_i = \left(\frac{v_i}{K_i} \right)^{1/a}$. Essa função corresponde à resistência hidráulica em um tubo, comumente representada da forma $h_i = K_i \cdot q_i^a$, onde K_i é uma constante do duto i , determinada em função de seu comprimento, diâmetro e material; e a é um expoente empírico que, em geral, assume valores no intervalo $1,8 < a < 2$ para um escoamento turbulento. Note ainda que as válvulas de retenção podem ser tratadas como resistores não lineares, cuja função característica é análoga à característica tensão-corrente de um diodo, a qual satisfaz igualmente as condições impostas acima.

Análise dos Conjuntos de Corte

Seja τ uma árvore da rede contendo todas as fontes de tensão e nenhuma fonte de corrente. Foi mostrado em [3] que τ existe – pode sempre ser escolhida a partir de η . Os ramos incluídos na árvore serão chamados ramos da árvore, e os ramos fora da árvore serão chamados ligações.

Sejam:

$E_1, \dots, E_m$: os valores das m fontes de tensão de η ;

$r_1, \dots, r_n$: os n ramos resistivos da árvore;

$r_{n+1}, \dots, r_{n+p}$: as p ligações resistivas; e

$J_1, \dots, J_q$: os valores das q fontes de corrente.

Definimos agora (onde ' denota transposição):

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)'$ vetor das tensões nos ramos resistivos da árvore;

$\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_m)'$ vetor dos valores das fontes de tensão;

$\mathbf{j} = (J_1, \dots, J_q)'$ vetor dos valores das fontes de corrente;

$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$ vetor das tensões nos ramos da árvore τ ;

$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n+p})'$ vetor das tensões nos ramos resistivos de η ;

$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_{n+p})'$ vetor das correntes nos ramos resistivos de η .

Seja $Q = (q_{ij})$ a matriz de corte fundamental da rede η . As linhas de Q são ordenadas de modo que correspondam primeiro às fontes de tensão de η , e depois aos ramos resistivos de τ . As colunas de Q são dispostas de modo que correspondam primeiro às fontes de tensão, depois aos ramos resistivos da árvore, seguidos dos ramos resistivos das ligações e das fontes de corrente. (Figura 2)

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & \cdots & E_m & r_1 & \cdots & r_n & r_{n+1} & \cdots & r_{n+p} & J_1 & \cdots & J_q \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \gamma_{T(E)L(R)} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \gamma_{T(R)L(R)} & \end{array} \right] \end{matrix}$$

Figura 2 - Ordem de linhas e colunas na matriz fundamental de corte.

Definiremos ainda a seguinte notação: sejam E , R e J os subconjuntos de η que contém respectivamente os ramos do tipo: fontes de tensão, resistores e fontes de corrente. Usaremos a letra T para designar ramos da árvore, e L para ligações. Assim: $T(R)$ denota o subconjunto dos ramos resistivos da árvore τ , $L(R)$ denota o subconjunto das ligações resistivas de η ; etc. $T(ER)$ denota a união dos conjuntos $T(E)$ e $T(R)$, que corresponde ao conjunto de todos os ramos da árvore.

Se X é um subconjunto dos ramos de τ , e Y é um subconjunto dos ramos de η , definimos ainda $\gamma_{X,Y}$ como uma sub-matriz de Q , que consiste na interseção das linhas de Q correspondentes aos elementos de X com as colunas de Q correspondentes aos elementos de Y .

Logo, $\gamma_{T(ER), L(R)}$ denota a sub-matriz $(m+n) \times p$ de Q que consiste na interseção das linhas correspondentes às fontes de tensão e aos ramos resistivos de τ , com as colunas correspondentes às ligações resistivas.

Chamemos de $\mathbf{j}_r$ à contribuição das fontes de corrente $\mathbf{j}$ em cada conjunto de corte dos resistores de τ . Note que:

$$\mathbf{j}_r = \gamma_{T(R)L(J)} \cdot \mathbf{j} \quad (2)$$

e que a tensão nos ramos resistivos $\mathbf{v}$ é dada por:

$$\mathbf{v} = \gamma_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Assim, a equação da Primeira lei de Kirchhoff nos conjuntos fundamentais de corte dos resistores da árvore pode ser escrita como:

$$\gamma_{T(R),R} \cdot \mathcal{G}^* \left(\gamma'_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \right) + \gamma_{T(R),L(R)} \mathbf{j} = 0 \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & & & 0 \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{n+p} \end{bmatrix}$$

é a matriz diagonal de operadores. Note que $\mathbf{i} = \mathbf{G}^*(\mathbf{v})$ significa $\mathbf{i} = (g_1(v_1), \dots, g_{n+p}(v_{n+p}))'$.

Para um dado $\mathbf{E}$, a equação (4) pode ainda ser escrita como

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}) + \mathbf{j}_r = \mathbf{0}, \quad (5)$$

onde:

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}) = \gamma_{T(R),R} \cdot \mathbf{G}^* \left(\gamma'_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \right) \quad (6)$$

é a contribuição da corrente nos ramos resistivos para a corrente em cada conjunto de corte fundamental.

Para cada vetor $\mathbf{e}$ no espaço Euclidiano E^n das tensões nos ramos resistivos da árvore, corresponde um vetor (também no espaço Euclidiano E^n) das correntes nos conjuntos de corte dos ramos resistivos da árvore. Essa correspondência é proporcionada pelo mapeamento não linear $\mathbf{G}$.

A solução da rede consiste, portanto, em encontrar o vetor $\mathbf{e}$ que satisfaça (4) dados os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{j}$; ou ainda, que satisfaça a (5), dados os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{j}_r$.

Teorema de Seitzman-Katzenelson

Para a rede η descrita acima, a solução é dada por $\mathbf{e} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{e}_m$, onde

$$\mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{e}_m + \frac{k_1}{k_2} (-\mathbf{j}_r - \mathbf{G}(\mathbf{e}_m)) \quad (7)$$

e $\mathbf{e}_0$ é um elemento arbitrário de E^n . Além do mais, tal progressão converge monotonicamente para a solução da rede.

A constante k_1 é o menor limitante inferior das condutâncias da árvore, dada por:

$$k_1 = \min_{i=1, \dots, n} g_i. \quad (8)$$

A constante k_2 é dada pelo quadrado da norma espectral da matriz fundamental de condutâncias $\mathbf{B}=(b_{ij})$ da rede linear η_L . Essa nova rede linear é obtida a partir de η substituindo cada resistor não-linear r_k por um resistor linear cuja condutância é igual a $\bar{g}_k$.

Pode-se mostrar que k_2 é igual ao quadrado do maior autovalor de $\mathbf{B}$, e que:

$$k_2 \leq k'_2 = n^2 \left(\sum_{i=1}^{n+p} \bar{g}_i \right)^2 \quad (9)$$

onde n é o número de ramos resistivos da rede e p é o número de ligações.

Um limitante mais próximo para k_2 pode ser obtido da seguinte forma: para cada conjunto de corte fundamental resistivo da rede linear η_L , calcula-se:

$$\text{condutância do ramo da árvore} + 2 * [\text{soma das condutâncias das ligações}].$$

k_2 é limitado pelo quadrado do valor máximo obtido dentre esses valores calculados para todos os conjuntos de corte fundamentais. Esse resultado, consequência direta do Teorema de Gershgorin, é utilizado na prática [5].

Uma prova detalhada da convergência monotônica do método pode ser encontrada em [1].

Heurística de Aceleração

Seitelman e Katzenelson propuseram ainda uma modificação heurística no algoritmo para reduzir o tempo de solução. Em testes realizados, os tempos de solução do algoritmo puderam ser reduzidos de 25 a 95% mediante a aplicação do método de aceleração descrito a seguir.

O refinamento é baseado na idéia de que, embora (7) especifique um “salto” que sempre reduz o erro da norma, freqüentemente um salto maior pode ser dado.

Assim, na n -ésima iteração, o programa tenta dar um salto maior, compara o erro obtido deste salto com o erro resultante da aplicação de (7), e escolhe o ponto que apresentar o menor erro para ser $\mathbf{e}_{n+1}$. Detalharemos essa idéia a seguir.

Seja $\mathbf{e}_i$ o vetor de tensões nos ramos da árvore obtido após i iterações, e seja $\delta \mathbf{e}_i$ o vetor de alteração nas tensões da árvore calculado pela aplicação de (7), isto é:

$$\delta \mathbf{e}_i = c(-\mathbf{j}_r - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i)) \quad (10)$$

onde $c = k_1/k_2$ (Figura 3).

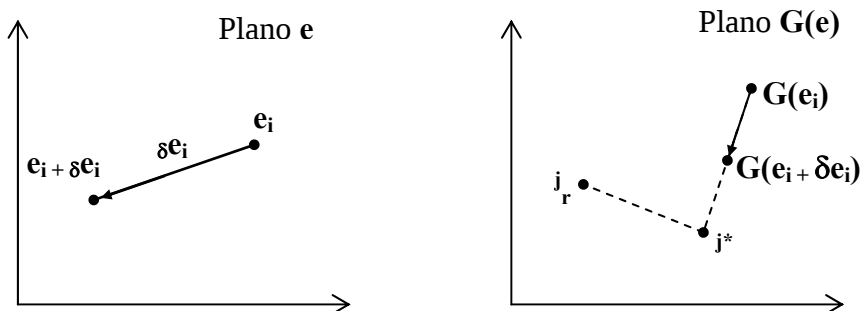


Figura 3- Heurística de aceleração do algoritmo.

Considere o ponto $\mathbf{j}^*$ sobre a reta que contém os pontos $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i)$ e $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i)$. O ponto $\mathbf{j}^*$, que se encontra mais perto de $-\mathbf{j}_r$ do que $\mathbf{G}(\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i)$, pode ser obtido em uma única iteração utilizando, ao invés de c , uma constante de iteração c^* dada por:

$$c^* = c \frac{\|\mathbf{j}^* - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i)\|}{\|\mathbf{G}(\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i) - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i)\|}. \quad (11)$$

Chamemos o resultado dessa iteração de

$$\Delta\mathbf{e}_i = c^* \cdot (-\mathbf{j}_r - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i)). \quad (12)$$

O valor de $\mathbf{e}_{i+1}$ é escolhido da seguinte forma: compare os dois valores

$$\begin{cases} L_1 = \|\mathbf{j}_r - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i)\| \\ L_2 = \|\mathbf{j}_r - \mathbf{G}(\mathbf{e}_i + \Delta\mathbf{e}_i)\| \end{cases} \quad (13)$$

Escolhemos então:

$$\mathbf{e}_{i+1} = \begin{cases} \mathbf{e}_i + \delta\mathbf{e}_i & \text{se } L_1 \leq L_2 \\ \mathbf{e}_i + \Delta\mathbf{e}_i & \text{se } L_1 > L_2 \end{cases} \quad (14)$$

Efetivamente, isto significa que o método heurístico de aceleração realiza duas iterações do método normal de solução e seleciona o melhor resultado.

CONCLUSÃO

Procuramos descrever ao longo dessas páginas um método para solução de redes hidráulicas baseado na aplicação do método de Seitzman-Katzenelson na solução do circuito elétrico análogo.

O principal atrativo da metodologia proposta é sua convergência monotônica para a solução em um número finito de iterações independentemente do ponto de partida do algoritmo.

O método iterativo, entretanto, possui convergência lenta em comparação com outros métodos de solução. A desvantagem em seu desempenho se deve principalmente à escolha dos limitantes inferior e superior para as funções características dos dutos. Tal escolha é feita com base na estimativa da faixa de vazões na qual a rede pode operar. A heurística de aceleração proposta pelos próprios autores procura mitigar a questão, ficando, no entanto, aquém de uma velocidade de convergência satisfatória.

A característica da *convergência segura* apresentada pelo método é o que permite que este possa ser utilizado com ferramenta desenvolvimento de algoritmos híbridos, ao assegurar que a iteração seguinte aproxime-se cada vez mais da solução da rede, evitando ciclos improdutivo de busca da solução, ou mesmo a divergência por parte dos métodos tradicionais.

O desenvolvimento de técnicas que melhorem ou que assegurem a convergência de algoritmos clássicos, que já apresentam desempenhos satisfatórios, é uma constante demanda nas pesquisas que se desenvolvem sobre o tema.

Acreditamos que a troca de experiências e de resultados entre diferentes áreas de conhecimento, como eletricidade e hidráulica, é uma atividade extremamente proveitosa, embora ainda pouco articulada e explorada. A opção por tratar o problema hidráulico no domínio da teoria dos circuitos é colocada como uma tentativa de intensificar o diálogo e o intercâmbio de informações entre os pesquisadores dos diferentes campos científicos.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Katzenelson and Seitelman, L. H., “An Iterative Method for Solving Networks of Nonlinear Resistors”, IEEE T. Circuits Sys., vol. CT-13, pp. 317-323, 1966.
- [2] Duffin, R. J., “Nonlinear Networks II”, Bull Am. Math. Soc., Vol. 53, pp.963-971, October 1947.
- [3] Desoer, C. A. and Katzenelson, J., “Nonlinear RLC Networks”, B.S.T.J., vol. 44, pp. 161-198, Jan 1965.
- [4] Wood, D. J. and Rayes, A. G., “Reability of algorithms for pipe network analysis”. J. Hydre. Di. ASCE, 107(HY7), pp. 1145-1161, 1981.
- [5] Wood, D. J. and Charles, C. O. A., “Hydraulic network analysis using linear theory”. J. Hydre. Di. ASCE, 98(HY7), pp. 1157-1170, 1972.
- [6] Computer Methods for Circuit Analysis and Design, Vlach, J. and Singhal, Kishore. Van Nostrand Reinhold, 2^a ed., 1993.
- [7] Collins, M., Cooper, L., Helgason, R., Kennington, J. and LeBlanc, L. “Solving the pipe network analysis problem using optimization technics”, Mgmt. Sci., 27(7), pp. 747-760, 1978.
- [8] Cross, H. “Analysis of flows in networks of conduits or conductors”. Bull No. 286, Univ. of Illinois Engrg. Experiment Station, Urbana, III, 1936.
- [9] Martin, D. W. and Peters, G., “The application of Newton’s method to network analysis by digital computer.” J. Inst. of Water Engrs., 17, pp. 115-129, 1963.
- [10] Todini, E., and Pilati, C. “A gradient algorithm for the analysis of pipe networks.” Proc. Comp. Applications in Water Supply, B. Coulbeck and C. Orr. Eds., Research Studies Press, Letchworth, Hertfordshire, England, pp. 1-20, 1988.
- [11] Berghout, B. L. and Kuczera, G., “Network linear programming as pipe network hydraulic analysis tool”, J. Hydre. Di. ASCE, pp. 549-558, june1997.
- [12] Numerical Analysis. Burden, Richard L., Faires, Douglas J. Ed. PWS-Kent, 4^a ed., 1988.
- [13] Sandberg, I. W. , “On properties of some systems that distort signals – I ”. Bell Sys. Tech. J., Vol 42, pp 2033-2046, September 1963.