

# ANÁLISE DE CHEIAS DA BACIA HIDROGRÁFICA DO PIRANHAS-AÇU, SEMIARIDO DA PARAIBA, SEGUNDO DISTRIBUIÇÃO GEV E MOMENTOS LH

*Manoel Moisés F. de Queiroz<sup>1</sup>; Edilandia Farias Dantas<sup>2</sup>; Antonio Lopes da Silva<sup>2</sup>*

**Resumo:** A distribuição de probabilidade generalizada de valores extremos (GEV), introduzida por Jenkinson (1955), tem encontrado muitas aplicações em hidrologia. Ela tem sido utilizada para modelar uma extensa variedade de extremos naturais, incluindo cheias, chuvas, velocidade do vento, temperaturas e outros máximos. Estudos têm mostrado que estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da GEV em pequenas amostras são instáveis, podendo fornecer valores absurdos do parâmetro de forma, onde são recomendados estimadores de momentos LH, uma generalização de momentos L, que são baseados na combinação linear de estatísticas de altas ordens, introduzidas para caracterizar a parte mais alta da distribuição e os valores extremos dos dados. O objetivo deste trabalho foi modelar séries de cheias anuais de rios da bacia do Piranhas-Açu, sub bacia 37, através da distribuição de probabilidade generalizada de valores extremos - GEV, utilizando o método de momentos de combinação linear das estatísticas de altas ordens (momentos LH) para estimação de seus parâmetros. Como resultados obtiveram-se ajustes da distribuição GEV às formas de valores extremos do tipo VEII e VEIII referentes às séries de cheias anuais, aceitos pelo teste de Wang, com nível de significância de 5%.

**Abstract:** The generalized extreme-value (GEV) distribution, introduced by Jenkinson (1955), has found many applications in hydrology. It has been used to model a wide variety of natural extremes, including floods, rainfall, wind speeds, temperature, and other maxima. Previous studies show that small-sample maximum-likelihood estimators parameters are unstable and demonstrates that absurd values of the GEV shape parameter can be generated and recommend LH moments estimators, a generalization of L moments, that are based on linear combinations of higher-order statistics are introduced for characterizing the upper part of distributions and larger events in data. The objective of this work was fitting series of annual floods in rivers Piranhas-Açu basin, sub basin 37, using GEV distribution by moments of linear combinations of higher order statistics (LH moments) for estimation of their parameters. As results were obtained fitting distribution GEV to forms of extreme values of the type VEII and VEIII relating to the series of annual floods, accepted by the test of Wang, with a significance level of 5%.

**Palavras-Chave:** cheias anuais, momentos LH, distribuição GEV, Piranhas-Açu

---

<sup>1</sup> Prof. Adjunto da Área de Recursos Hídricos, CCTA, UFCG, Rua Jairo Vieira Feitosa, S/N, Bairro dos Pereiros, Fone (83) 3431-2376, CEP 58.840-000, Pombal-PB, [moises@ccta.ufcg.edu.br](mailto:moises@ccta.ufcg.edu.br);

<sup>2</sup> Acadêmicos, Engenharia Ambiental, CCTA, UFCG, Rua Jairo Vieira Feitosa, S/N, Bairro dos Pereiros, Fone (83) 3431-2376, CEP 58.840-000, Pombal-PB, [edilasndiantas@hotmail.com](mailto:edilasndiantas@hotmail.com); [antoniolopsilva@gmail.com](mailto:antoniolopsilva@gmail.com).

## **INTRODUÇÃO**

Em planejamento e elaboração de projeto estrutural de obras hidráulicas a estimação da cheia de projeto é feita a partir da análise de frequência das séries de vazões observadas. Em estruturas de grandes portes a estimação da cheia é realizada para períodos de retorno que chegam a ser milenares ou decamilenares, que são superiores ao período das observações dos dados. Assim a estimação da cheia é feita com o ajuste, aos dados, de um modelo de distribuição de probabilidade conhecido, onde a partir da extrapolação dos mesmos, obtém-se o valor da cheia de projeto.

Recentemente, a distribuição de probabilidade generalizada de valores extremos (GEV), introduzida por Jenkinson (1955), tem encontrado muitas aplicações em hidrologia, com crescente aceitação para descrição dos eventos máximos naturais, principalmente a dados de cheias anuais. Decorrente da consideração teórica de que a distribuição de valores extremos de uma amostra converge assintoticamente para uma das três formas de valores máximos reunidas através da distribuição GEV, independente de sua distribuição subjacente (Wang,1997).

Na prática, a distribuição GEV tem sido usada para modelar uma extensa variedade de máximos naturais, incluindo, além de cheias, chuvas, velocidade do vento, temperaturas, picos de ondas do mar e outros máximos (Martins & Stedinger, 2000). Seu uso associado ao método de estimação de parâmetros dos momentos de combinação lineares das estatísticas de altas ordens (momentos LH) tem produzido bons resultados de ajustes aos dados de eventos hidrológicos extremos (Wang, 1996; 1997a;1997b; Queiroz, 2002; Queiroz &Chaudhry, 2006; Preti et. all., 2007; Queiroz et. all., 2010).

Esse trabalho teve como objetivo modelar as séries de vazões máximas observadas em vários rios da bacia do Piranhas Açu, sub bacia 37, através da distribuição GEV, utilizando o método dos momentos de combinação lineares das estatísticas de altas ordens (momentos LH).

## **MATERIAL E MÉTODOS**

A bacia hidrográfica do rio Piranhas-Açu está situada no Nordeste do Brasil, pertencente ao território dos estados do Rio Grande do Norte e da Paraíba, totalmente inserida no clima semi-árido nordestino. Possui uma área total de drenagem de 43.681,50 Km<sup>2</sup>, sendo 26.183,00 Km<sup>2</sup>, correspondendo a 60% da área no Estado da Paraíba, e o restante no Estado do Rio Grande do Norte. O principal rio da bacia é o rio Piranhas-Açu, de domínio federal, uma vez que nasce no município de Bonito de Santa Fé, no Estado da Paraíba, e segue seu curso natural pelo Estado do Rio Grande do Norte, desaguando no Oceano Atlântico, na Costa Potiguar.

As séries de cheias anuais foram construídas a partir das seqüências de vazões diárias observadas em 4 estações fluviométricas da ANA, localizadas na sub bacia 37 da bacia hidrográfica do Piranhas-açu, no estado do Paraíba, considerando a vazão diária máxima ocorrida em cada ano.

---

A Tabela 1 mostra a localização das estações cujos dados das séries de vazões foram utilizados. Cada série de cheias anuais foi ajustada através da distribuição de probabilidade generalizada de valores extremos (GEV), utilizando o método dos momentos de combinação linear das estatísticas de altas ordens (momentos LH), segundo metodologia proposta por Wang (1997). Para tanto, utilizaram-se rotinas computacionais em Matlab desenvolvidas por Queiroz & Chaudhry (2006) que fornece os parâmetros da distribuição GEV, as taxas de momentos LH e os valores do teste de Wang referentes aos 4 níveis de ajustes  $LH_{\eta}$  ( $\eta=0, 1, \dots, 4$ ). A qualidade dos ajustes às séries de cheias foi verificada através do teste proposto por Wang (1998). Os dados de cheias estão apresentados em gráficos de posição de plotagem seguindo a fórmula APL [ $P = (i-0,35)/n$ ], onde  $n$  é o tamanho, juntamente com seus ajustes, plotados em função da variável reduzida de Gumbel.

Tabela 1 - Estações fluviométricas instaladas na bacia do Piranhas Açú

Código	Nome	Sub-bacia	Rio	Estado	Município	Responsável	Operadora
<a href="#">37290000</a>	APARECIDA	37	RIO DO PEIXE	PARAÍBA	SOUSA	ANA	CPRM
<a href="#">37340000</a>	PIANCÓ	37	RIO PIANCÓ	PARAÍBA	PIANCÓ	ANA	CPRM
<a href="#">37380000</a>	PAU FERRADO	37	RIO PIANCÓ	PARAÍBA	POMBAL	ANA	CPRM
<a href="#">37410000</a>	SÍTIO VASSOURAS	37	RIO PIRANHAS AÇÚ	PARAÍBA	POMBAL	ANA	CPRM

### Distribuição GEV

A função de distribuição generalizada de valores extremos – GEV, que engloba as três formas assintóticas de distribuição de valores extremos conhecidas como valor extremo do tipo I (VEI), valor extremo do tipo II (VEII) e valor extremo do tipo III (VEIII) (Fisher Tippett, 1928; Gumbel, 1958), é definida, segundo Jenkinson (1955), como segue:

$$F(x) = P(X \leq x) = \exp \left[ - \left( 1 - k \frac{x-u}{\alpha} \right)^{\frac{1}{k}} \right] \quad (1)$$

Quando o parâmetro  $k$  se aproxima de zero a equação (1) converge para a distribuição Gumbel

$$F(x) = P(X \leq x) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x-u}{\alpha} \right) \right] \quad (2)$$

sendo

$-\infty < x < +\infty$ ,  $k=0$  - distribuição VEI (distribuição Gumbel)

$\varepsilon \leq x < +\infty$ ,  $k < 0$  - distribuição VEII

$-\infty < x \leq \omega$ ,  $k > 0$  - distribuição VEIII

onde  $u$  é um parâmetro de posicionamento com  $-\infty < u < +\infty$ ,  $\alpha$  é um parâmetro de escala com  $0 < \alpha < +\infty$  e  $k$  é um parâmetro de forma com  $-\infty < k < +\infty$ . Assim, quando  $k > 0$  o limite superior

da distribuição assintótica VEIII torna-se  $\omega = u + \alpha/k$  e quando  $k < 0$  o limite inferior da distribuição assintótica VEII torna-se  $\varepsilon = u + \alpha/k$ .

**O p-ésimo quantil da distribuição GEV é dado pelas seguintes relações decorrentes das equações (1) e (2):**

$$x_p = u + \frac{\alpha}{k} \left[ 1 - (-\ln(p))^k \right], \quad k \neq 0, \quad 0 < p < 1 \quad (3)$$

$$x_p = u - \alpha \ln[-\ln(p)], \quad k = 0, \quad 0 < p < 1 \quad (4)$$

Combinando a equação (2) com a variável reduzida de Gumbel (z):  $z = (x - u)/\alpha$ , obtém-se  $F(x) = \exp[-\exp(-z)]$ , que resulta em:

$$z = \ln[-\ln(F(x))] \quad (5)$$

A variável reduzida de Gumbel também se relaciona com o período de retorno (T),  $T = 1/F(x)$ . Logo, a equação (2) pode ser usada para definir z com respeito às distribuições VEI, VEII e VEIII. Assim, em um gráfico x versus z define-se o comportamento das três formas de distribuições de valores extremos, com relação à posição de plotagem de x, como mostra a Figura 1.

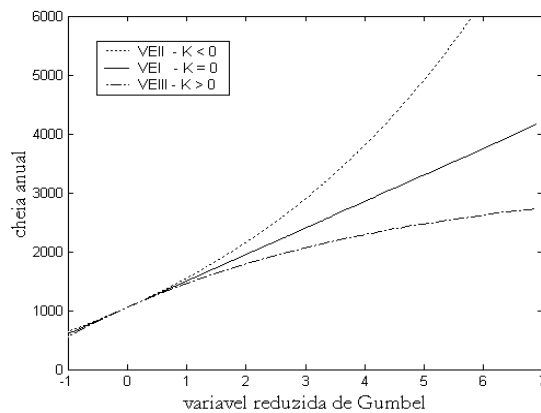


Figura 1- Distribuição das três formas de valores extremos representados pela GEV.

### Momentos LH

Dada uma amostra, os três parâmetros  $u, \alpha, \kappa$  da distribuição GEV podem ser estimados, considerando a estimativa dos momentos LH amostrais,  $\hat{\lambda}_i^\eta$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), como mostradas através das equações (3a a 3d), ordenando a amostra em  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ .

$$\hat{\lambda}_1^\eta = \frac{1}{n C_{\eta+1}} \sum_{i=1}^n i^{-1} C_\eta x_{(i)} \quad (6a)$$

$$\hat{\lambda}_2^\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{n C_{\eta+2}} \sum_{i=1}^n (i^{-1} C_{\eta+1} - i^{-1} C_\eta^{n-1} C_1) x_{(i)} \quad (6b)$$

$$\hat{\lambda}_3^\eta = \frac{1}{3} \frac{1}{{}^n C_{\eta+3}} \sum_{i=1}^n \left( {}^{i-1} C_{\eta+2} - 2 {}^{i-1} C_{\eta+1} {}^{n-i} C_1 + {}^{i-1} C_\eta {}^{n-i} C_2 \right) x_{(i)} \quad (6c)$$

$$\hat{\lambda}_4^\eta = \frac{1}{4} \frac{1}{{}^n C_{\eta+4}} \sum_{i=1}^n \left( {}^{i-1} C_{\eta+3} - 3 {}^{i-1} C_{\eta+2} {}^{n-i} C_1 + 3 {}^{i-1} C_{\eta+1} {}^{n-i} C_2 - {}^{i-1} C_\eta {}^{n-i} C_3 \right) x_{(i)} \quad (6d)$$

onde  ${}^m C_j = \binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$  e  ${}^m C_j = 0$  quando  $j > m$ .

comparando-os aos momentos da distribuição GEV,  $\lambda_i^\eta$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), para cada valor selecionado de  $\eta$  ( $\eta=0, 1, 2, 3, \dots$ ) e  $\kappa \neq 0$ , como descrito a seguir (Wang, 1997):

$$\lambda_1^\eta = u + \frac{\alpha}{\kappa} \left[ 1 - \Gamma(1+k)(\eta+1)^{-k} \right] \quad (7a)$$

$$\lambda_2^\eta = \frac{(\eta+2)\alpha\Gamma(1+\kappa)}{2!\kappa} \left[ -(\eta+2)^{-\kappa} + (\eta+1)^{-\kappa} \right] \quad (7b)$$

$$\lambda_3^\eta = \frac{(\eta+3)\alpha\Gamma(1+\kappa)}{3!\kappa} \left[ -(\eta+4)(\eta+3)^{-\kappa} + 2(\eta+3)(\eta+2)^{-\kappa} - (\eta+2)(\eta+1)^{-\kappa} \right] \quad (7c)$$

$$\lambda_4^\eta = \frac{(\eta+4)\alpha\Gamma(1+\kappa)}{4!\kappa} \left[ -(\eta+6)(\eta+5)(\eta+4)^{-\kappa} + 3(\eta+5)(\eta+4)(\eta+3)^{-\kappa} - 3(\eta+4)(\eta+3)(\eta+2)^{-\kappa} + (\eta+3)(\eta+2)(\eta+1)^{-\kappa} \right] \quad (7d)$$

As taxas de momentos LH da distribuição GEV são calculadas de acordo com as seguintes relações:

$$\tau_2^\eta = \frac{1}{2} \frac{(\eta+2)\alpha\Gamma(1+k) \left[ -(\eta+2)^{-k} + (\eta+1)^{-k} \right]}{ku + \alpha \left[ 1 - \Gamma(1+k)(\eta+1)^{-k} \right]} \quad (8a)$$

$$\tau_3^\eta = \frac{1}{3} \frac{(\eta+3) \left[ -(\eta+4)(\eta+3)^{-k} + 2(\eta+3)(\eta+2)^{-k} - (\eta+2)(\eta+1)^{-k} \right]}{(\eta+2) \left[ -(\eta+2)^{-k} + (\eta+1)^{-k} \right]} \quad (8b)$$

$$\tau_4^\eta = \frac{1}{12} \frac{(\eta+4) \left[ -(\eta+6)(\eta+5)(\eta+4)^{-k} + 3(\eta+5)(\eta+4)(\eta+3)^{-k} \right]}{(\eta+2) \left[ -(\eta+2)^{-k} + (\eta+1)^{-k} \right]} + \frac{\left[ -3(\eta+4)(\eta+3)(\eta+2)^{-k} + (\eta+3)(\eta+2)(\eta+1)^{-k} \right]}{(\eta+2) \left[ -(\eta+2)^{-k} + (\eta+1)^{-k} \right]} \quad (8c)$$

onde  $\tau_2^\eta, \tau_3^\eta, \tau_4^\eta$  são, respectivamente, o coeficiente de variação LH, assimetria LH e curtose LH e  $\Gamma(\bullet)$  a função. Para a análise da qualidade dos ajustes foi aplicado a teste de Wang (1998), com significância de 5 %. Para este estudo foi adotada a rotina em MATLAB para momentos LH proposta por Queiroz & Chaudhry (2006) em que a metodologia aqui descrita também está adequadamente apresentada.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

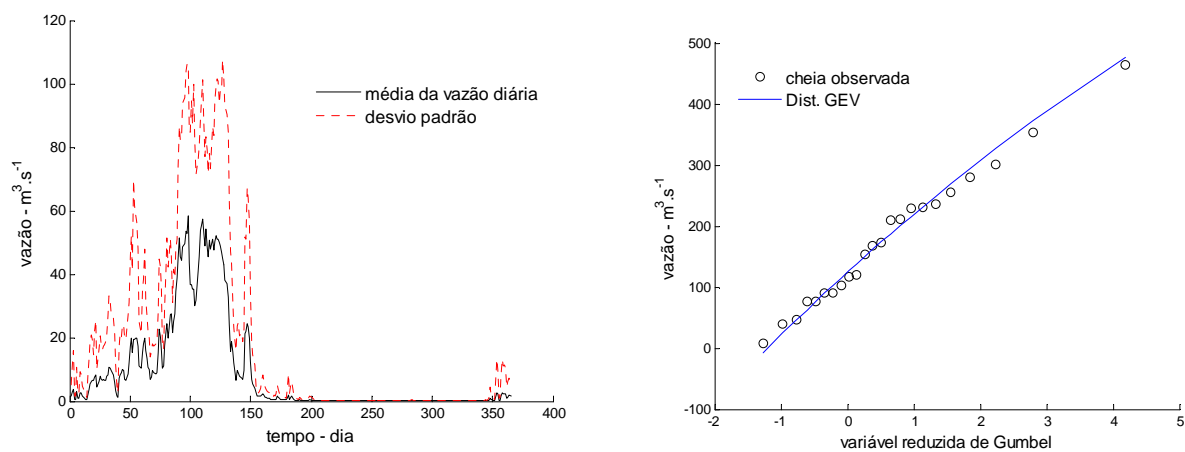
Os resultados apresentados na Tabela 2 mostram que as séries de cheias dos rios analisados apresentam duas das três formas de valores extremos e que a distribuição GEV ajustou-se a todas elas, segundo o teste de Wang, com nível de significância de 5 %. Mesmo para a série que apresenta extensão inferior a 30 anos, o método de momentos LH redeu bons ajustes, evidenciando sua habilidade em ajustar séries com poucos dados. Os valores  $-0.03 < k < 0.03$  compreendem, na prática, a distribuição Gumbel, sendo assim, não houve ajustes correspondendo a GEV do tipo VEI (Gumbel), houve um ajuste correspondente a GEV tipo VEII ( $k < 0$ ) e três a GEV tipo VEIII ( $k > 0$ ). As taxas de momentos, mostradas na Tabela 2, apresentam comportamento semelhante ao observado em variáveis hidrológicas, onde, geralmente, apresentam coeficiente de assimetria e de curtose positivos.

TABELA 2: Parâmetros e Taxas de momentos da distribuição GEV, e valores do teste de Wang para as séries de cheias anuais.

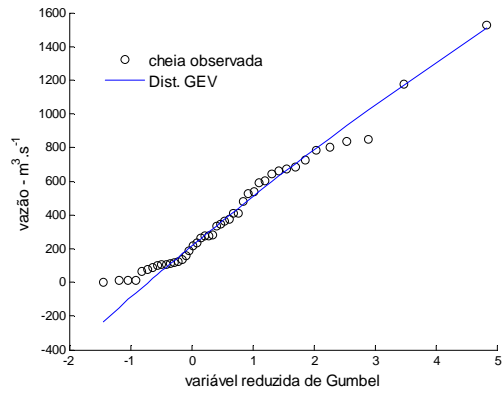
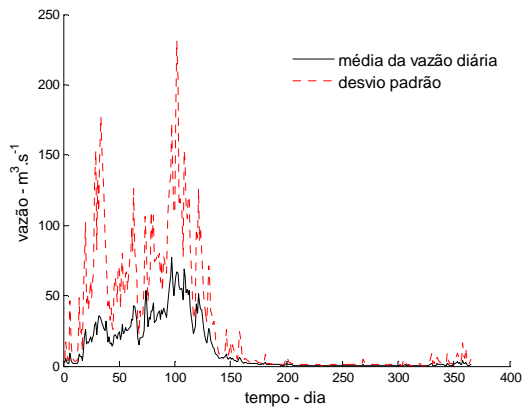
Estação	Parâmetros da GEV				Taxas de momentos LH				Teste de Wang*
	N	k	$\alpha$	u	cv	ca	cc	LH	
37290000	23	0,07	98,75	124,14	0,2263	0,2017	0,1471	2	0,3145
37340000	44	0,05	299,35	215,24	0,2304	0,2489	0,1469	3	0,2823
37380000	41	0,31	296,94	19,83	0,2055	0,1617	0,0276	5	1,1119
37410000	46	-0,25	295,34	320,14	0,4688	0,3437	0,1277	1	1,4654

k - parâmetro de forma;  $\alpha$  - parâmetro de escala; u - parâmetro de posicionamento; cv - coeficiente de variação; ca - coeficiente de assimetria e cc - coeficiente de curtose. \*Todos os ajustes foram aceitos pelo teste de WANG com nível de significância de 5 % de probabilidade (valor teórico  $Z_{wt(0.05)}=1,96$ ).

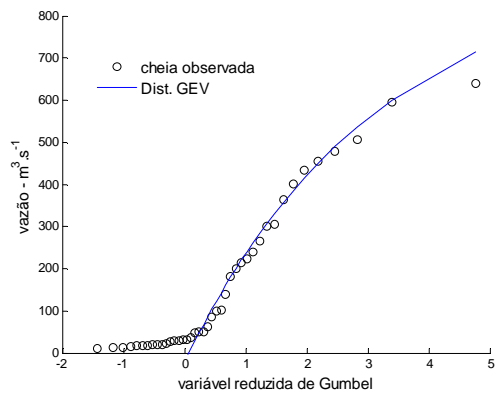
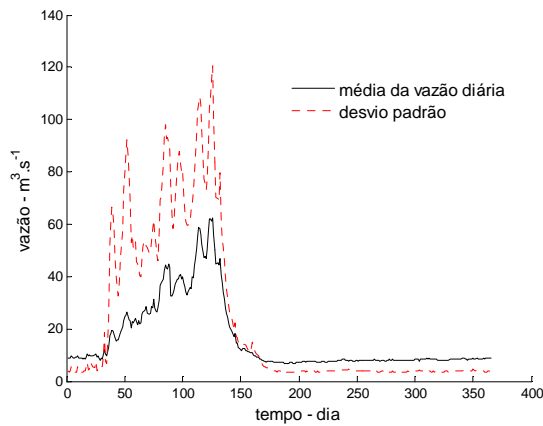
Os ajustes da distribuição GEV às séries de vazões máximas anuais referentes as 4 estações fluviométricas da sub bacia 37, estão apresentadas na Figura 1, juntamente com as séries das médias das vazões diárias e de seus respectivos desvios padrão.



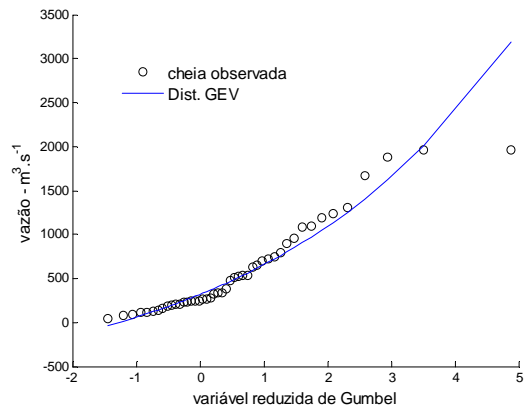
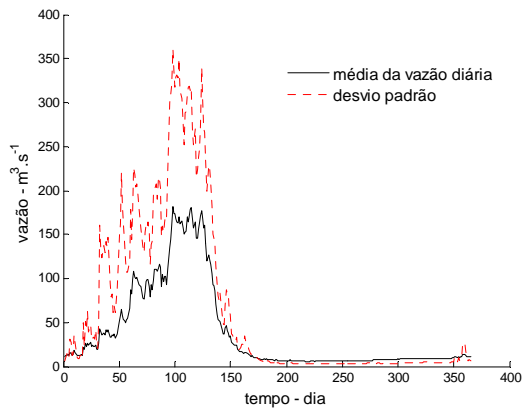
**Estação 37290000**



**Estação 37340000**



**Estação 37380000**



**Figura 1 - Ajustes da distribuição GEV às séries de vazões máximas anuais referentes às 4 estações fluviométricas da sub bacia 37, juntamente com as séries das médias das vazões diárias e de seus respectivos desvios padrão**

## CONCLUSÕES

As séries de cheias foram ajustadas adequadamente através da distribuição GEV, usando método de momentos LH, mesmo para as séries com menor quantidade de dados observados ( $n = 23$ ), onde ocorreram as formas assintóticas de valores extremos tipo VEII ( $k < 0$ ) e do tipo VEIII.

As séries das médias de vazões diárias apresentam desvios superiores às mesmas, nos períodos correspondentes aos das ocorrências de chuvas, ficando abaixo das mesmas, no período de estiagem, em que os rios são perenizados por vários reservatórios.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JENKINSON, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v.81, p.158-171.

MARTINS, S.E.; STEDINGER, J.R. (2000). Generalized maximum-likelihood generalized extreme - value quantile estimators for hydrologic data. *Water Resour. Res.*, v.36, n.3, p.737-744.

QUEIROZ, M. M. F. de (2002). Análise de cheias anuais segundo distribuição generalizada. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

QUEIROZ, M. M. F. de ; CHAUDHRY, Fazal Hussain (2006). Análise de eventos hidrológicos extremos usando a distribuição gev e momentos lh. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 10, p. 381-389.

QUEIROZ, M. M. F. de ; SAMPAIO, Sívio César ; GOMES, Benedito Martins ; Iost, Caroline , (2010). Estudo de vazões mínimas Q1,10 e Q7,10 de rios do Paraná segundo distribuição generalizada. *Revista Verde de Agroecologia e Desenvolvimento Sustentável*, v. 5, p. 32/3-46.

PRETI, Agnaldo Passolongo ; QUEIROZ, M. M. F. de ; GOMES, Benedito Martins ; BOAS, Márcio Antônio Vilas ; FAZOLO, Ajadir ; SILVA, Vanderlei Rodrigues da, (2007) . Determinação da curva volume versus duração por meio da distribuição do valor extremo generalizada para estimativa do volume de espera em reservatórios. *Acta Scientiarum* (UEM), v. 29, p. 69-77.

WANG, Q. J. (1996). Using partial probability-weighted moments to fit the extreme value distribution to censored samples. *Water Resour. Res.*, v.32, n.6, p.1767-1772.

WANG, Q. J. (1997a). Using higher probability weighted moments for flood frequency analysis. *J. Hydrology*, v.194, p.95-106.

WANG, Q. J. (1997b). LH moments for statistical analysis of extreme events. *Water Resour. Res.*, v.33, n.12, p.2841-2848.

WANG, Q. J. (1998). Approximate goodness-of-fit test of fitted generalized extreme value distribution using LH moments. *Water Resou. Res*, v.34, n.12, p.3497-3502.