

# XIX SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HIDRÍCOS

## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO EM AQUIFERO SEMI- CONFINADO, UTILIZANDO FERRAMENTAS DO EXCEL**

*José Eduardo Alamy Filho<sup>1</sup>; Ana Clara Mendes Caixeta<sup>2</sup>; Bruna Santos<sup>2</sup>; Luciana Alves Sá<sup>2</sup>;  
Vanessa Maria Frasson<sup>2</sup>; Marcio Ricardo Salla<sup>3</sup>*

**Resumo** – O presente artigo trata da modelagem e simulação de um aquífero sedimentar, limitado na base por uma formação impermeável e, no topo, por uma formação semi-permeável. A simulação considerou o bombeamento de múltiplos poços, cujo efeito foi modelado por um termo sumidouro de massa, introduzido na equação diferencial governante. A recarga vertical, decorrente do suprimento de água através do aquífero foi modelada por um termo fonte de massa. A solução numérica baseou-se no uso do Método de Diferenças Finitas. Um estudo do espaçamento entre os nós foi realizado, comparando a solução numérica e a solução analítica. Este estudo permitiu a seleção de uma malha cartesiana adequada para a simulação. Todo o procedimento de cálculo foi realizado dentro do programa Excel, desde o pré-processamento, até a visualização de resultados, a qual utilizou ferramentas gráficas desse programa. O código computacional foi implementado na linguagem *Visual Basic for Applications*, embutida no Excel. Os resultados evidenciaram padrões esperados para escoamentos em aquíferos semi-confinados, submetidos à extração de água por poços.

**Abstract** – This paper deals with the modeling and simulation of a sedimentary aquifer, bounded at the base by an impervious formation and, at the top, by a semi-permeable formation. The simulation considered a system of multiple pumping wells, whose effect was modeled by a mass sink term introduced in the governing differential equation. The vertical recharge, due to the supply of water through the aquitard (leakage) was modeled by a mass source term. The numerical solution was based on the use of finite difference method. A study of the spacing between nodes was performed comparing the numerical solution and analytical solution. This study allowed the selection of a Cartesian mesh suitable for the simulation. The entire procedure of calculation was performed within the Excel program, from pre-processing, to visualization of results, which used graphical tools for this program. The computer code was implemented in Visual Basic for Applications, language built into Excel. The results showed patterns expected for flow in semi-confined aquifer, submitted to water extraction by wells.

**Palavras-Chave** – águas subterrâneas, simulação computacional, aquíferos

---

<sup>1</sup> Professor Doutor da Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil. Avenida João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco 1Y, Uberlândia, MG, Brasil. Fone: (34) 3239-4170. Fax: (34) 3239-4159. E-mail: zealamy@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Mestrandas em Engenharia Civil. Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil. Avenida João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco 1Y, Uberlândia, MG, Brasil. Fone: (34) 3239-4170. Fax: (34) 3239-4159. E-mails: anaclara\_caixeta@hotmail.com, brunasantos.nha2@gmail.com, lasa\_eng@yahoo.com.br, vanessafrasson\_ambiental@hotmail.com.

<sup>3</sup> Professor Doutor da Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil. Avenida João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco 1Y, Uberlândia, MG, Brasil. Fone: (34) 3239-4170. Fax: (34) 3239-4159. E-mail: mrsalla@feciv.ufu.br .

## INTRODUÇÃO

Em termos quantitativos globais, as águas subterrâneas constituem a principal fonte de água potabilizável no planeta. Segundo Fetter (1994), as reservas de águas subterrâneas constituem 0,61% de toda água, enquanto que as águas superficiais respondem por apenas 0,009%. Apesar das incertezas inerentes a estes valores percentuais, as estimativas sugerem que o volume de água subterrânea é de 40 a 70 vezes maior do que o volume de águas superficiais. Neste sentido, estudos hidrogeológicos de campo e teóricos (modelagem e simulação computacional) são significativamente importantes para a gestão técnica das águas subterrâneas.

Apesar da grande quantidade, nem toda água contida no subsolo pode ser aproveitada, como aquelas contidas nas zonas não saturadas ou aquelas contidas em formações geológicas muito profundas, nas quais os elevados custos de extração tornariam seu aproveitamento inviável. Há ainda formações rochosas que contêm água, mas que não permitem sua movimentação, ou que permitem sua transmissão sob taxas muito pequenas. Estas últimas são designadas por aquitardes, os quais não chegam a constituir um aquífero. Apesar disso, os aquitardes podem suprir os aquíferos quando os limitam por grandes áreas superficiais. Este suprimento de água, também chamado de drenança, representa uma fonte de recarga indireta que ocorre quando a carga hidráulica do aquitarde é maior do que a carga hidráulica do aquífero.

O presente artigo discorre sobre a modelagem matemática horizontal do escoamento em um aquífero semi-confinado, limitado no topo por um aquitarde e, na base, por uma formação impermeável. Este tipo de arranjo com camadas semi-confinantes é comum diante da ocorrência de rochas pouco ou medianamente fraturadas ou de camadas com grandes teores de argila que ficam sobrepostas ao aquífero. A implementação computacional do modelo foi realizada dentro do programa Excel, com o algoritmo de cálculo construído na linguagem *Visual Basic for Applications*. Este artigo também pretende expor a viabilidade de se realizar a simulação computacional neste ambiente, que é amigável para a maior parte dos profissionais de engenharia. Além de possibilitar a implementação de um código computacional, o Excel dispõe de ferramentas gráficas adequadas para a análise dos escoamentos. O uso do Excel para simulação numérica de aquíferos constitui uma alternativa módica, diante dos elevados custos de aquisição de pacotes computacionais comerciais.

## EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação diferencial que governa o escoamento em aquíferos é baseada no princípio de Conservação de Massa e na Lei de Darcy, aplicados em um elemento de volume infinitesimal do aquífero. De uma maneira geral, a equação traz, como variável dependente, a carga hidráulica no aquífero, relacionando-a com parâmetros hidrogeológicos da formação, como a condutividade

hidráulica, a espessura saturada e o coeficiente de armazenamento. Para levar em conta o efeito de singularidades, como poços de bombeamento, ou o efeito de recarga distribuída, são utilizados termos sumidouro/fonte de massa. Nesse contexto, a equação geral que descreve o escoamento de água subterrânea em um aquífero é escrita como:

$$S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) + G \quad (1)$$

Na Equação (1),  $h$  é a carga hidráulica no aquífero,  $S_s$  é o armazenamento específico e  $K_i$  representa a condutividade hidráulica na direção “ $i$ ” ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ). O termo  $G$  é utilizado para modelar a vazão de água injetada ou retirada por unidade de volume do aquífero.

Neste estudo, a carga hidráulica foi calculada como a soma da carga potencial e de pressão, tomando como *datum* o nível médio dos oceanos. Tem-se, nesse caso, uma carga hidráulica correspondente à cota piezométrica do aquífero, haja vista que a carga cinética é normalmente desprezada. Isto é justificado pelo fato da movimentação da água subterrânea ser geralmente lenta, normalmente da ordem de *cm/dia*, na maior parte da extensão do aquífero. Ao longo da área horizontal da formação, os diferentes níveis pontuais de pressão, quando reunidos, formam a superfície piezométrica. A condutividade hidráulica é o parâmetro que representa a facilidade de uma formação transmitir água, enquanto que o armazenamento específico relaciona-se com o volume de água liberado, por unidade de volume do aquífero, por unidade de declínio da superfície piezométrica.

Como, em geral, a largura e a extensão dos aquíferos são muitas ordens de grandeza maiores do que sua espessura, pode-se considerar que o fluxo preferencial de água é horizontal na maior parte da formação. Esta hipótese é ainda ratificada sob condições de confinamento e de poços totalmente penetrantes. Nesses casos, a Equação (1) pode ser integrada ao longo da vertical, fornecendo um modelo bidimensional (2DH) que permite fazer estimativas da carga hidráulica ao longo da área horizontal do aquífero. Esta equação, para formações confinadas, pode ser escrita como:

$$S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( B \cdot K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \cdot K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + g(\vec{X}, t) \quad (2)$$

Na Equação (2),  $B$  é a espessura da formação e  $g(x,y,t)$  é termo fonte/sumidouro, que representa a vazão injetada/retirada por unidade de área horizontal do aquífero. Este último termo pode ser utilizado para modelar o efeito da recarga indireta por drenança, constituindo um termo fonte, e/ou o efeito de poços que extraem água do aquífero, constituindo um termo sumidouro. Note-se que essas duas particularidades dependem da posição, mais especificamente das coordenadas espaciais ( $\vec{X} = x, y$ ), e do tempo ( $t$ ). Com isto é possível levar em conta o efeito de

múltiplos poços disseminados na área de estudo, bem como o efeito de recargas indiretas distribuídas de maneira não uniforme no espaço.

## O MODELO NUMÉRICO

O Método de Diferenças Finitas foi utilizado, neste trabalho, para a solução numérica da Equação (2). Neste caso, a área analisada foi discretizada por uma malha estruturada e cartesiana, cujos nós são espaçados de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . A Figura 1 ilustra o esquema de discretização de uma área por uma malha retangular. Na referida figura, também é ilustrado o sistema de indexação dos nós, adotando-se o índice “ $j$ ” para a direção  $X$  e o índice “ $i$ ” para a direção  $Y$ .

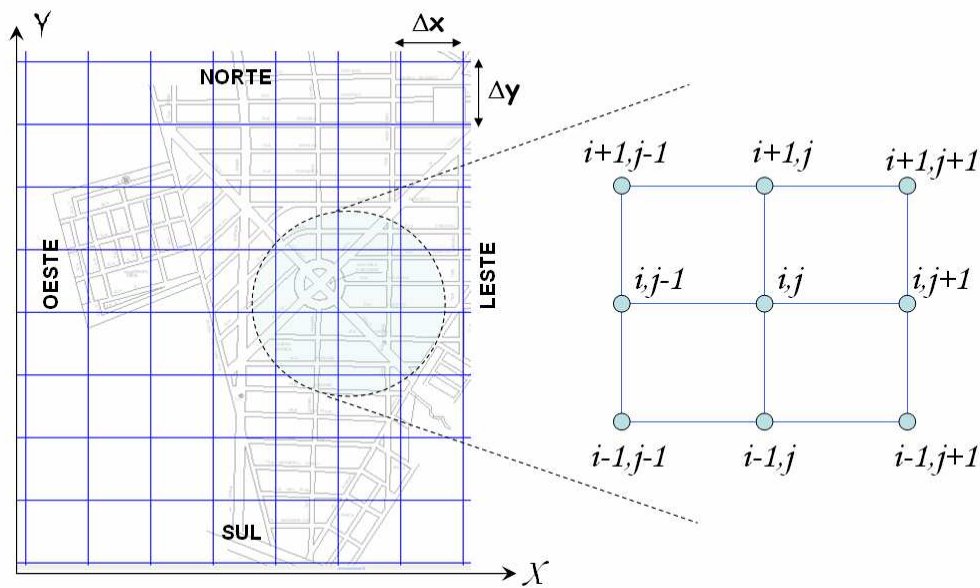


Figura 1 – Esquema de discretização de uma área por uma malha cartesiana de diferenças finitas e arranjo de indexação dos nós.

A solução adotada prevê a variação da superfície piezométrica do aquífero, induzida pela ativação de poços situados dentro da região discretizada. Tem-se, neste caso, uma análise em regime transiente, onde as cargas hidráulicas em cada nó sofrem variações com o tempo. Para levar em conta essas variações temporais, foi utilizado o esquema de Euler de primeira ordem, descrito pela Equação (3):

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \Delta t \cdot f^n \quad (3)$$

Na Equação (3), o sobrescrito “ $n$ ” indica o nível de tempo atual e “ $n+1$ ” o nível de tempo futuro. O incremento de tempo é representado por  $\Delta t$  e o termo  $f$  engloba a soma dos termos difusivos e fonte/sumidouro, conforme a Equação (4):

$$f = \frac{\partial}{\partial x} \left( B \cdot K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \Big|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \cdot K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \Big|_{i,j} + g1|_{i,j} - g2|_{i,j} \quad (4)$$

Na Equação (4), os termos difusivos foram discretizados por diferenças centrais de segunda ordem nos nós internos do domínio, de acordo com:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left( B \cdot K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right|_{i,j} = B_{i,j} \cdot K_{x_{i,j}} \cdot \frac{h_{i,j+1} - 2 \cdot h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \left( B \cdot K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right|_{i,j} = B_{i,j} \cdot K_{y_{i,j}} \cdot \frac{h_{i+1,j} - 2 \cdot h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta y^2} \quad (6)$$

O modelo numérico adotou um tratamento diferente para as derivadas nos nós situados nas fronteiras do domínio de cálculo. Dessa forma, nas fronteiras oeste e sul, os termos difusivos foram discretizados por diferenças progressivas de segunda ordem. Nas fronteiras leste e norte, o arranjo de discretização utilizado foi o de diferenças regressivas, também de segunda ordem.

Os termos  $g1$  e  $g2$  representam, respectivamente, o efeito da recarga por drenança e o efeito de poços que extraem água do aquífero. A drenança ocorre quando há diferenças entre a carga hidráulica do aquífero e do aquitarde. Para que haja suprimento de água, é preciso que a cota piezométrica do aquitarde superposto ( $h_1$ ) seja maior do que a cota piezométrica do aquífero ( $h$ ). Nesse sentido, o termo  $g1$  modela a vazão de água, introduzida verticalmente no aquífero, por unidade de área horizontal da formação. Este efeito pode ser calculado como:

$$g1|_{i,j} = \frac{K_1}{B_1} \cdot (h_1 - h) \quad (7)$$

Na Equação (7), o subscrito “1” indica características do aquitarde, como a condutividade hidráulica vertical ( $K_1$ ), a cota piezométrica ( $h_1$ ) e a espessura saturada ( $B_1$ ). O termo de recarga indireta  $g1$  é calculado para todos os nós da malha, mas somente assume valores diferentes de zero quando as cargas hidráulicas no aquitarde e no aquífero são diferentes.

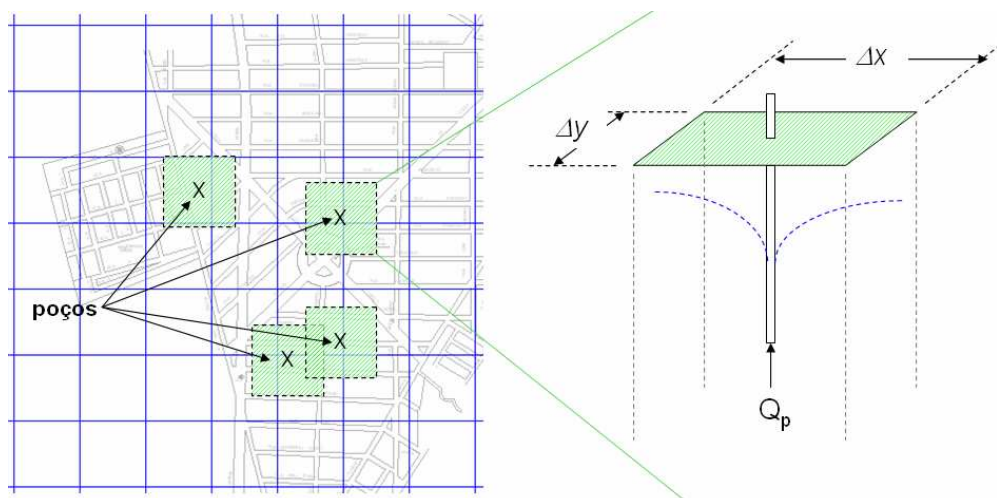


Figura 2 – Esquema de sistema com múltiplos poços e elemento de área horizontal utilizado no cálculo de  $g2$ .

O termo  $g_2$  é utilizado para modelar o efeito do bombeamento por múltiplos poços, conforme ilustra a Figura 2, representando a vazão bombeada (extraída) por unidade de área horizontal do aquífero.

Assim, a taxa de retirada de água, causada pela operação de poços, pode ser estimada como:

$$g_2 = \frac{Q_p}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (8)$$

Na Equação (8),  $Q_p$  é a vazão retirada pelo poço “ $p$ ”; e o produto entre  $\Delta x$  e  $\Delta y$  representa a área de uma célula da malha de discretização. Como, na simulação por diferenças finitas, a carga hidráulica do aquífero é calculada em cada nó  $(i,j)$  e as posições desses nós não coincidem com as dos poços, torna-se necessário transferir a vazão, retirada pelo poço “ $p$ ”, para o nó mais próximo deste ponto. Essa transferência é feita desde que o poço “ $p$ ” esteja dentro de um raio numérico de influência, ilustrado pela Figura 3 e calculado como:

$$R_{inf} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2} \quad (9)$$

Eventualmente, é possível que haja mais de um poço dentro do raio de influência do nó, fator que deve ser levado em consideração pela soma das taxas de retirada de cada poço. Em função disto, o efeito de um ou mais poços sobre um nó  $(i,j)$ , pode ser quantificado como:

$$g_2|_{i,j} = \sum_{R_{inf}} \frac{Q_p}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (10)$$

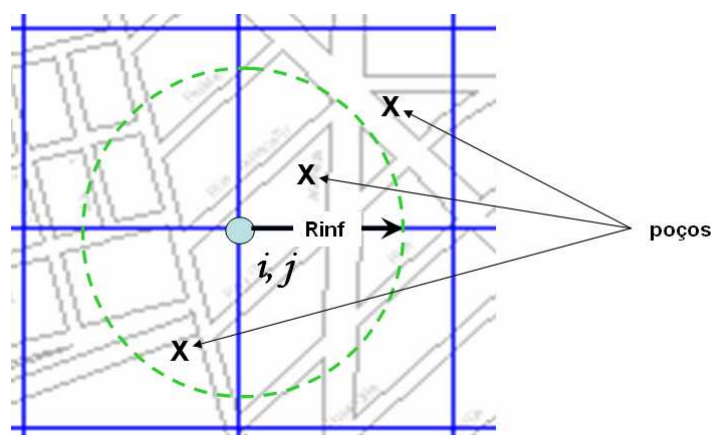


Figura 3– Zona de influência do nó  $(i,j)$ : os poços nela contidos transferem sua vazão para o nó.

O termo de extração de água  $g_2$  é calculado nos nós da malha que têm poços ativados dentro do seu raio numérico de influência. Este valor é anulado para nós cuja região de influência não contém poços, ou que contém poços desligados.

Como a solução numérica adotada seguiu procedimentos de “marcha no tempo”, uma vez que o esquema temporal adotado foi o explícito, foi preciso atentar-se para o valor do passo de tempo ( $\Delta t$ ). No cálculo de derivadas temporais por arranjos explícitos, o passo de tempo não pode ser muito grande, sob pena de instabilizar e destruir a solução numérica. Passos de tempo exageradamente pequenos, por sua vez, redundam em aumento notável do tempo para execução dos cálculos. Por isto, critérios de estabilidade são bastante utilizados como forma de restringir os incrementos temporais. Neste artigo, o critério de controle do passo de tempo utilizou:

$$\Delta t \leq 0,25 \cdot S \cdot \Delta x^2 / (K \cdot B) \quad (11)$$

## SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução analítica de Hantush e Jacob (1955) foi aplicada, neste trabalho, para analisar o refinamento da malha de discretização do modelo numérico. Esta solução é válida para aquíferos semi-confinados, horizontalmente infinitos, limitados no topo por um aquitarde e na base por um aquíclode ou aquífugo. Este modelo analítico ainda pressupõe aquífero homogêneo e isotrópico. A solução de Hantush e Jacob é aplicável quando o coeficiente de armazenamento do aquitarde é desprezível, situação equivalente a uma formação praticamente incompressível, que não libera água de armazenamento. Tal efeito acarreta a manutenção da carga hidráulica ( $h_I$ ) do aquitarde em um nível constante.

Este modelo analítico calcula o rebaixamento ( $s$ ) em um ponto situado a uma distância radial ( $r$ ) do poço de bombeamento. O rebaixamento, que depende da posição e do tempo ( $s = s(\bar{X}, t)$ ), é definido como a diferença entre a cota piezométrica inicial (antes da ativação do poço) e a cota piezométrica perturbada (após um instante  $t$  de bombeamento). Nesses casos, a carga hidráulica ( $h$ ) no aquífero pode ser calculada como:

$$h = h_o - s(\bar{X}, t) = h_o - \frac{Q_p}{4\pi \cdot K \cdot B} \cdot \int_u^\infty \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-y - \frac{r^2}{4 \cdot L^2 \cdot y}\right) \cdot dy \quad (12)$$

Na Equação (12),  $h_o$  é a carga hidráulica original no aquífero, antes de se iniciar o funcionamento do poço;  $K$  e  $B$  são, respectivamente, a condutividade hidráulica e a espessura do aquífero;  $Q_p$  é a vazão bombeada,  $u$  é uma distância adimensional ao poço,  $y$  é uma variável auxiliar de integração e  $L$  pode ser calculado como:

$$L = \sqrt{K \cdot B \cdot \frac{B_1}{K_1}} \quad (13)$$

O termo “ $u$ ”, amplamente utilizado em várias das soluções analíticas, é definido como:

$$u = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot K \cdot B \cdot t} \quad (14)$$

A integral, presente na Equação (12), é chamada de função de poço de Hantush. Neste artigo, a solução da referida equação utilizou integração numérica (soma de trapézios infinitesimais). Os procedimentos numéricos da integração foram truncados considerando  $\infty \equiv 2 \cdot 10^3 \cdot u$ .

## ALGORITMO DE CÁLCULO E SUA IMPLEMENTAÇÃO

O algoritmo construído para orientar a simulação foi dividido em oito blocos, conforme ilustra a Figura 4, cada um com objetivos específicos.

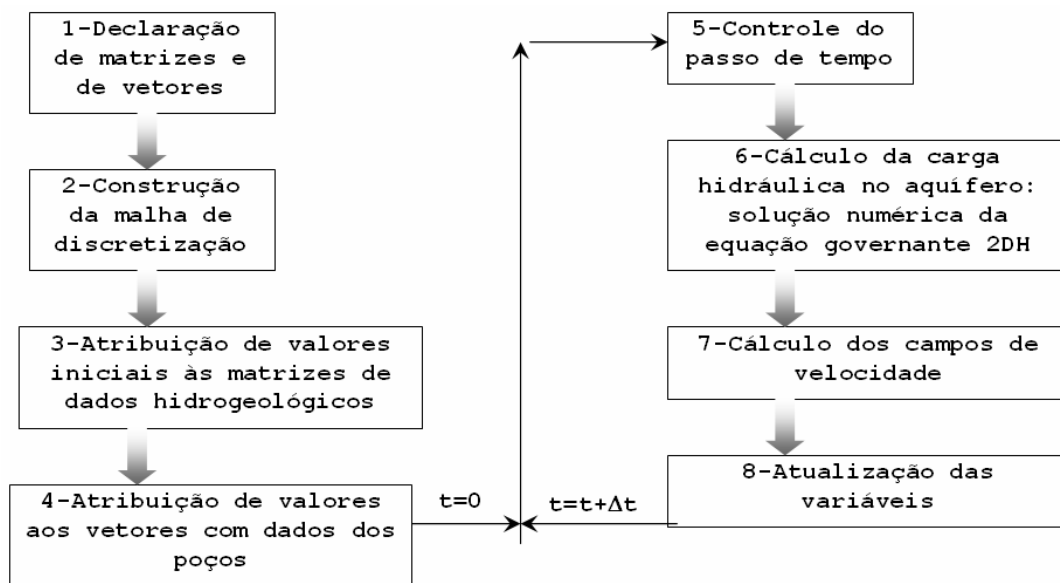


Figura 4 – Algoritmo de cálculo

Os blocos de 1 a 4 correspondem à preparação dos dados iniciais, definindo parâmetros, construindo a malha de discretização e atribuindo os valores iniciais (antes da ativação dos poços) aos vetores e matrizes. Os blocos de 5 a 8 formam a parte repetitiva dos cálculos. O bloco 6 constitui a etapa principal dos cálculos iterativos. Nele são calculadas as derivadas espaciais e temporais, a drenagem e a retirada de água pelos poços. Esses cálculos resultam no conhecimento da carga hidráulica futura em cada nó  $(h_{i,j}^{n+1})$ , a partir de valores conhecidos em todos os nós do domínio no instante atual.

A linguagem de programação utilizada para escrever o algoritmo foi o *Visual Basic for Applications*, voltado para os objetos do Excel. A Figura 5 ilustra um trecho do código computacional elaborado para o presente trabalho.



```

Sub final()
'=====
' SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS
' AQUIFERO SEMI-CONFINADO ALIMENTADO POR DRENANÇA VERTICAL
' SISTEMA DE MÚLTIPLOS POÇOS DE BOMBAMENTO
' COMPARAÇÃO COM MODELO ANALÍTICO DE HANTUSH
'=====

'DECLARAÇÃO DAS MATRIZES E VETORES:
'=====
Dim kx(250, 250), ky(250, 250), B(250, 250), S(250, 250), n(250, 250) As Double
Dim k1(250, 250), B1(250, 250) As Double
Dim ho(250, 250), h1(250, 250), h(250, 250) As Double
Dim x(250, 250), y(250, 250) As Double
Dim qx(250, 250), qy(250, 250), vx(250, 250), vy(250, 250) As Double
Dim v(250, 250), q(250, 250) As Double
Dim Qp(200), xp(200), yp(200), tp(200) As Double
Dim g2(250, 250) As Double
Dim ha(250, 250), NE(250, 250) As Double
Pi = 3.141593

'LIMPANDO CÁLCULOS ANTERIORES:
'=====
Sheets("2").Activate
Sheets("2").Range(Cells(40, 3), Cells(65000, 20)).ClearContents

'MALHA DE DISCRETIZAÇÃO:
'=====
Nx = 100
Ny = 100
Lx = 1000
Ly = 1000
dx = Lx / (Nx - 1)
dy = Ly / (Ny - 1)
ind = 1
For i = 1 To Ny
    For j = 1 To Nx
        x(i, j) = (j - 1) * dx
    
```

Figura 5 – Trecho de código implementado em *Visual Basic for Applications*

## SIMULAÇÃO

A simulação foi aplicada sobre uma zona urbana hipotética, submetida ao bombeamento de um sistema de poços. Apesar disso, não há nenhuma restrição quanto à utilização do modelo em situações reais, desde que estejam disponíveis dados geométricos e hidrogeológicos do aquífero e do aquífero, bem como dados operacionais dos poços. A Figura 6 ilustra a disposição horizontal dos poços, assim como o perfil litológico de um deles. Nota-se que a simulação abrangeu uma área urbana de  $1\text{km}^2$ . A informação do perfil litológico foi estendida para toda a região analisada. Este procedimento não é exatamente adequado para análise regional de aquíferos, onde o estudo de grandes áreas deve prever alterações nos níveis estáticos e nas espessuras das formações. Todavia, para áreas restritas, como no estudo de baterias de poços em zonas urbanas, a consideração de um perfil médio é uma alternativa razoável, partindo do princípio de que as formações geológicas apresentam variações muito suaves em áreas pequenas.

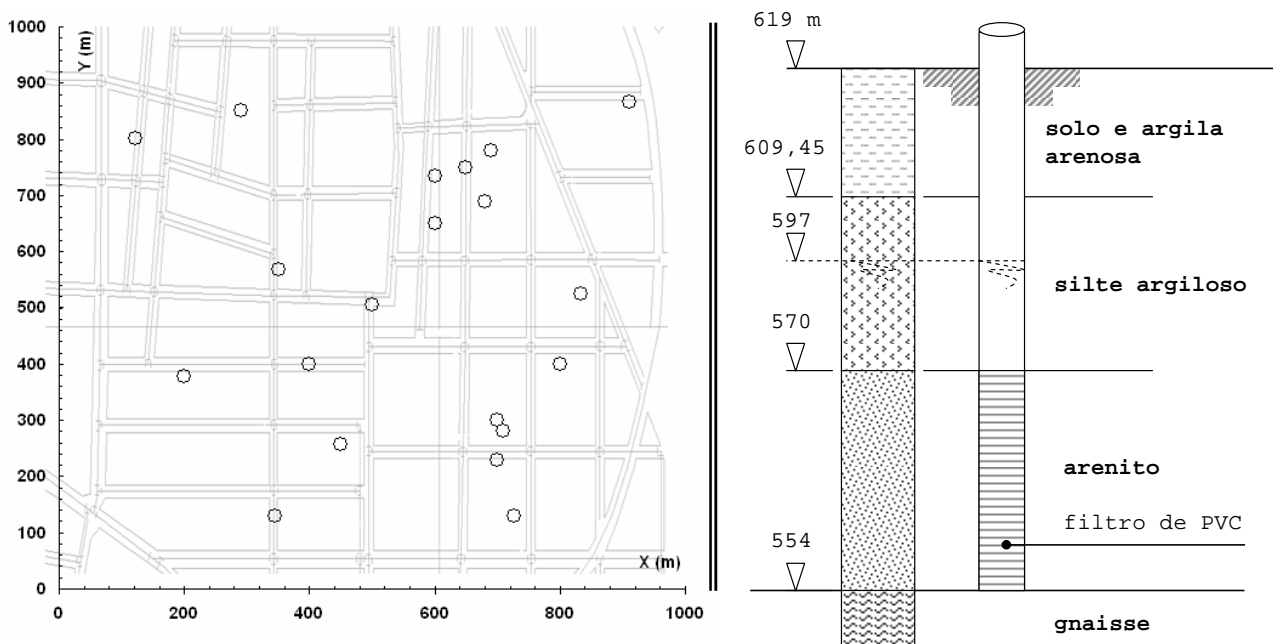


Figura 6 – Distribuição dos poços e perfil litológico utilizado na simulação.

O resumo das características de interesse para a simulação fornece:

- *Para o aquífero (arenito):* espessura de 16 m, cota piezométrica inicial de 597 m, condutividade hidráulica de  $2.10^{-5}$  m/s, coeficiente de armazenamento igual a  $10^{-4}$  e porosidade de 30%. Formação considerada homogênea e isotrópica na área de abrangência da simulação;
- *Para o aquífero (silte argiloso):* espessura de 27 m, cota piezométrica de 597 m, condutividade hidráulica vertical igual a  $5.10^{-9}$  m/s.
- *Dados operacionais dos poços:* filtro com penetração total no aquífero, nível estático na cota 597 m e vazão nominal de bombeamento de  $5 \text{ m}^3/\text{h}$  (para todos os poços). A ativação dos 20 poços ocorreu no mesmo instante.

Antes de se iniciar a simulação do sistema de poços propriamente dita, foi realizado um estudo para verificar o refinamento a ser utilizado para a malha de diferenças finitas. A idéia baseou-se na comparação dos rebaixamentos calculados via modelo numérico e analítico, gerados por um poço único, com as características operacionais idênticas àquelas aqui listadas. As características hidrogeológicas das formações foram igualmente idênticas. A comparação foi realizada dentro do cone de depressão, estabilizado em regime permanente. Nesse sentido, partindo do modelo analítico, o raio do cone foi estimado em 360 m. Dentro desse raio, a simulação utilizou malhas de 50x50 m, 20x20 m, 10x10 m e 5x5 m. Os resultados do estudo forneceram o levantamento dos resíduos entre a simulação numérica e a analítica. Nesse contexto, duas variáveis foram avaliadas: o máximo resíduo (*maxdif*) entre a solução numérica e a analítica; e a diferença

relativa máxima ( $dif_{rel}$ ) entre os rebaixamentos dos dois modelos. Estas variáveis, calculadas em regime transiente até a aproximação do regime estacionário ( $t = tmáx$ ), são definidas como:

$$\max dif = \max |h_{numérico} - h_{analítico}| \quad (15)$$

$$dif_{rel} = \max \frac{|s_{numérico} - s_{analítico}|}{s_{analítico}} \cdot 100 \quad (16)$$

Os resultados são ilustrados na Figura 7. A análise dessas duas variáveis resultou na seleção da malha de 10x10m. Embora o menor valor do máximo resíduo absoluto não tenha sido obtido com esta malha, sua utilização resultou na menor diferença relativa entre os rebaixamentos.

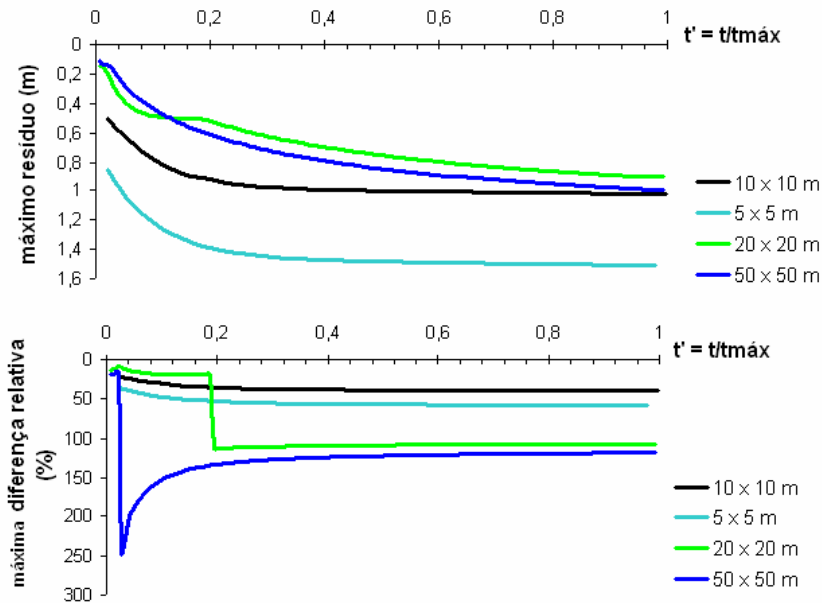


Figura 7 – Variação temporal dos resíduos entre a simulação numérica e analítica, para diferentes refinamentos de malha.

Os cones de depressão numérico e analítico, para a malha de 10x10 m, bem como a diferença absoluta entre as cotas piezométricas, são representados pela Figura 8. Note-se que esta solução numérica produziu rebaixamentos menores e que as duas soluções tendem a se aproximar na vizinhança do poço.

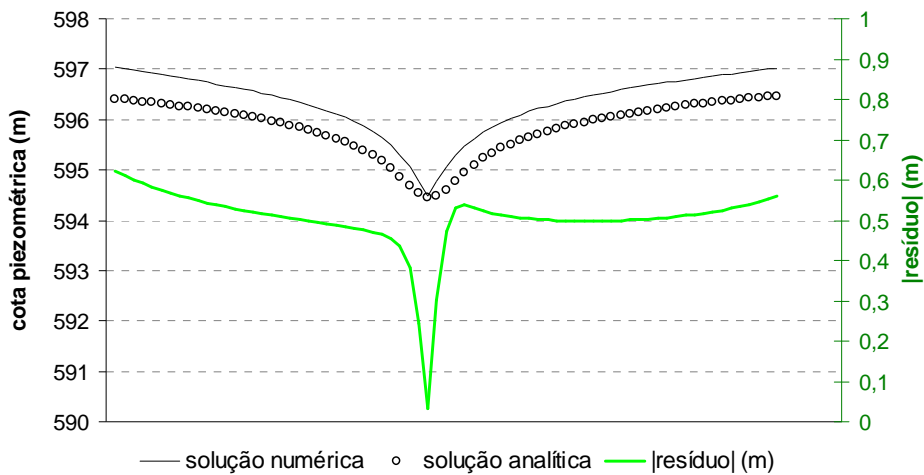


Figura 8 – Cones de depressão para as simulações numérica e analítica, e diferença absoluta entre eles.

Após a adoção da malha, a simulação do sistema de múltiplos poços foi realizada até que se atingisse o regime estacionário. Esta verificação baseou-se na análise das derivadas  $\partial h/\partial t$ , até que a soma de seus valores, em todos os nós, fosse menor do que uma tolerância pré-especificada. Neste contexto, a condição de parada descrita pela Equação (17) foi utilizada, de forma que o regime permanente foi obtido com 52,87 h (2,2 dias).

$$\sum_i \sum_j \frac{|h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n|}{\Delta t} \leq 10^{-5} \quad (17)$$

A Figura 9 ilustra mapas com as iso-linhas de cota piezométrica e a superfície piezométrica do aquífero, para diferentes instantes de simulação. Percebe-se que as alterações são bastante evidentes nas primeiras 7 h de bombeamento. O decaimento da cota piezométrica continua, mas com evoluções cada vez mais brandas até se atingir o regime estacionário. De 7 a 49 h de bombeamento, a tendência no desenho das iso-linhas praticamente não mais se altera, ainda que os valores das cotas piezométricas diminuam suavemente.

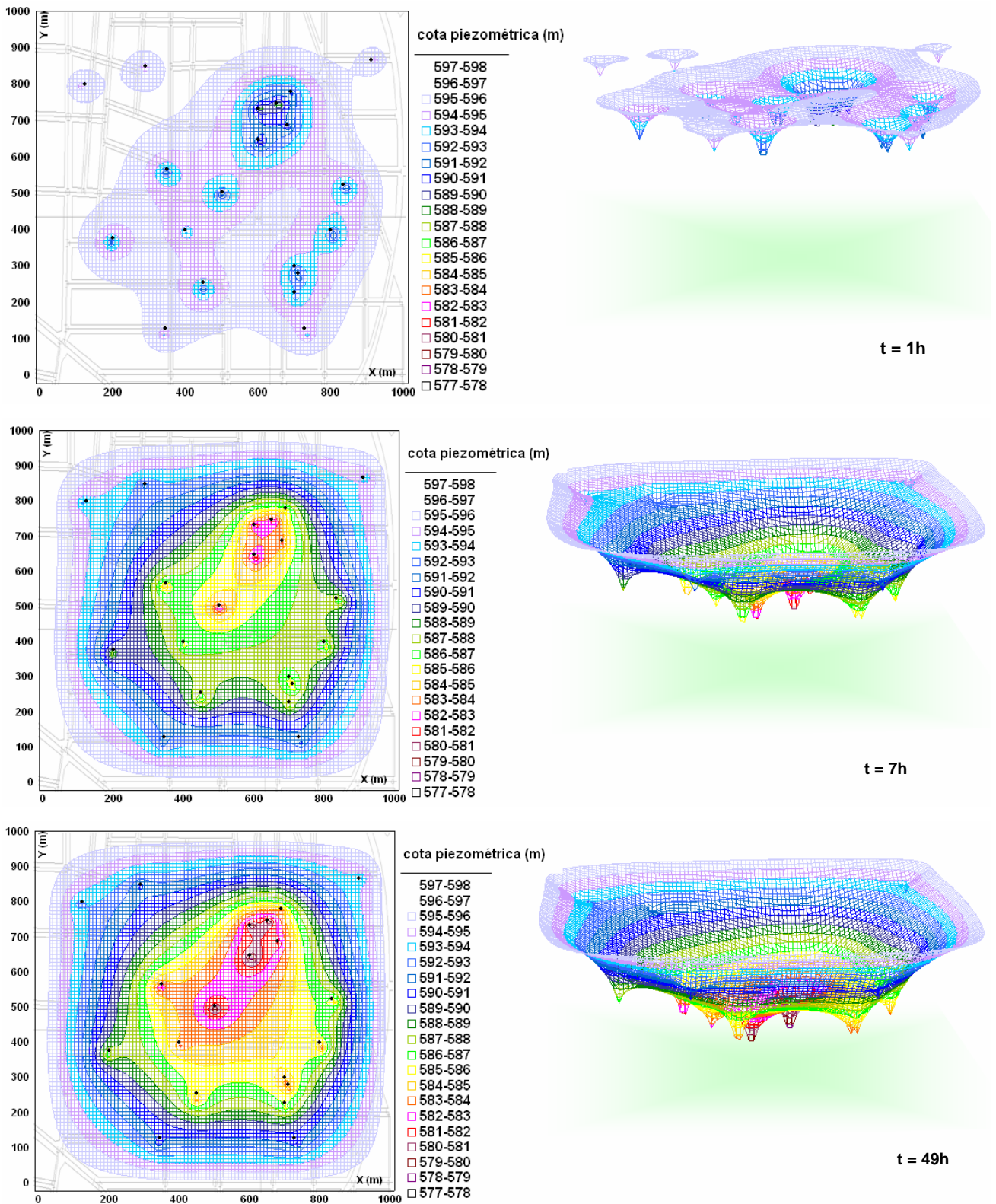


Figura 9 – Evolução da superfície piezométrica no aquífero em função do tempo de bombeamento.

Com as cargas piezométricas calculadas e armazenadas em cada nó da malha, foi possível estimar as velocidades aparentes do escoamento pela Lei de Darcy. A velocidade aparente, todavia, é menor do que a velocidade real de escoamento, uma vez que não considera a área de percolação da água pelos poros. Em aquíferos confinados e semi-confinados, a velocidade real é calculada

dividindo-se a velocidade aparente pela porosidade da formação. Nesse sentido, a Figura 10 ilustra a evolução do valor absoluto da velocidade real. A simulação evidenciou o surgimento de “ilhas de velocidade” no entorno dos poços. De 31 a 49 h de bombeamento, percebe-se que os campos de velocidade praticamente não são mais alterados. Os resultados fornecem movimentos da ordem de centímetros por dia.

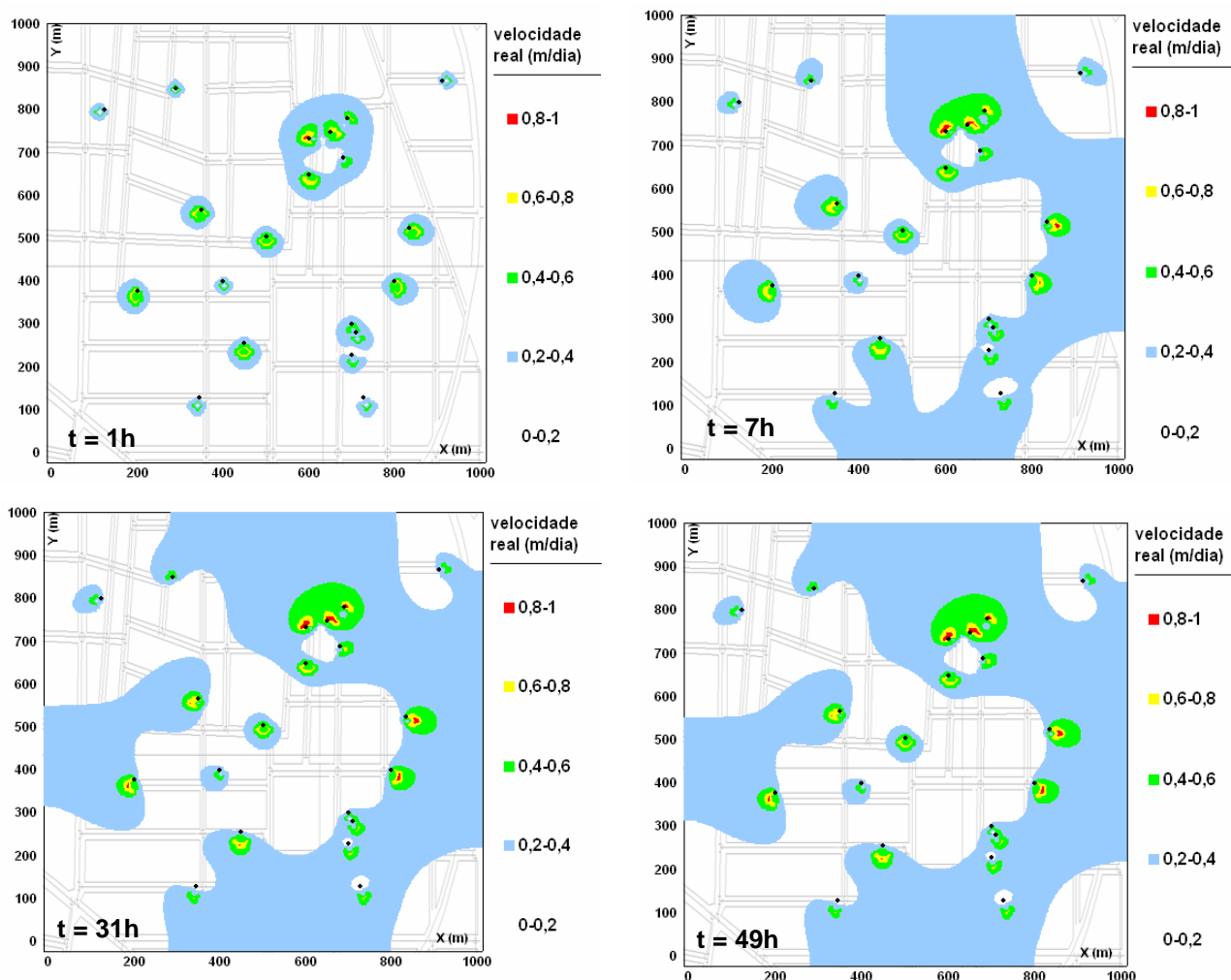


Figura 10 – Evolução dos valores absolutos da velocidade real de percolação.

À medida que os rebaixamentos da superfície piezométrica evoluem, surge uma diferença de carga hidráulica entre o aquífero e o aquitarde. Essa diferença proporciona uma recarga vertical com taxas maiores na proximidade dos poços, justamente onde os rebaixamentos são maiores. Apesar disso, durante o regime transiente, a retirada de água por bombeamento é preponderante em relação à injeção por drenança. Pela reduzida condutividade hidráulica deste aquitarde, as taxas de suprimento vertical de água são muito baixas, com valores máximos da ordem de  $0,1\text{m}^3/\text{ano}$ . A Figura 11 ilustra a evolução da drenança na região simulada. Nota-se que, nos instantes finais de simulação, as taxas de drenança tendem a uma estabilização.

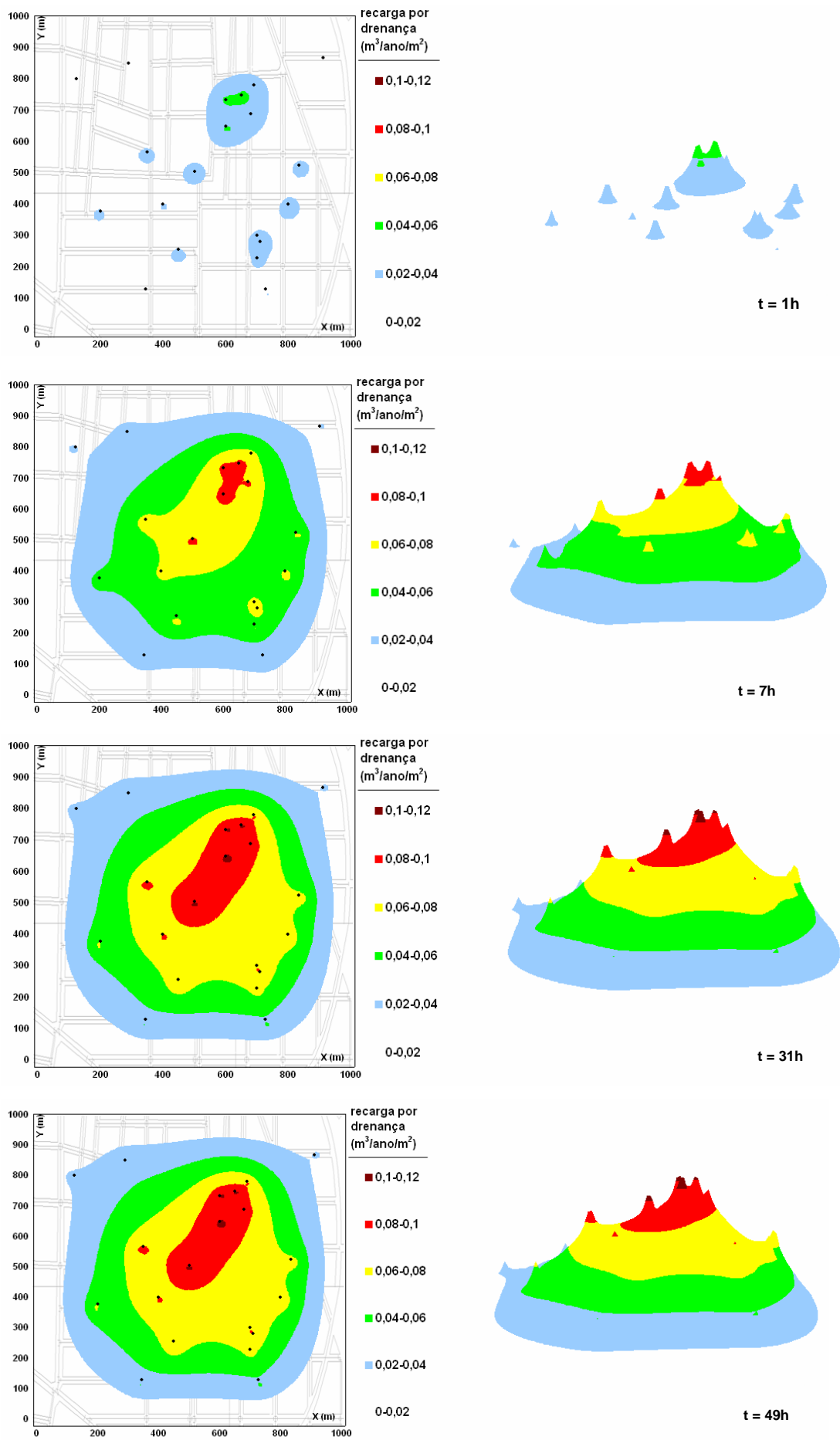


Figura 10 – Evolução espacial e temporal das taxas de recarga indireta

## CONCLUSÕES

As simulações realizadas com o modelo numérico 2DH revelaram tendências esperadas para o comportamento de aquíferos limitados no topo por formações semi-permeáveis. Dentre os padrões hidrodinâmicos observados, destacam-se as elevadas taxas de decaimento da superfície piezométrica, nos instantes iniciais de ativação dos poços, e a atenuação dessas taxas no decorrer do bombeamento; os elevados rebaixamentos verificados em setores de maior concentração de poços, confirmando os efeitos de interferências entre eles; e as baixas taxas de recarga vertical, decorrentes da reduzida condutividade hidráulica vertical do aquífero. Apesar disso, é interessante realizar uma análise comparativa com soluções analíticas, para avaliar o grau de refinamento da malha. Esta análise proporciona um tratamento mais adequado do termo sumidouro da equação diferencial governante, o qual representa a vazão bombeada por unidade de área horizontal do aquífero. Nesse contexto, é importante que o termo sumidouro e a área da célula de discretização proporcionem cones de depressão similares àqueles induzidos pelo poço. Se no modelo numérico a água é extraída em uma área horizontal, nos modelos analíticos a extração ocorre em um poço com diâmetro infinitesimal.

O artigo também demonstra a viabilidade de se utilizar o Excel como ferramenta abrangente para simulação dos escoamentos de águas subterrâneas. O uso desse programa, amplamente difundido na comunidade científica e na prática da Engenharia, permite o pré-processamento, através da entrada de parâmetros iniciais pelos bancos de dados armazenados em planilhas; o processamento dos dados de entrada, mediante a execução de cálculos iterativos implementados na linguagem *Visual Basic for Applications*; e o pós processamento com gráficos que permitem avaliar evoluções temporais e espaciais bidimensionais, fornecendo informações suficientes para a análise dos escoamentos. Vale citar que todos os gráficos apresentados neste trabalho foram gerados pelo Excel.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio dado aos projetos que visam a estudar as águas subterrâneas na região do Triângulo Mineiro.

## BIBLIOGRAFIA

- FETTER, C.W. (1994). *Applied Hydrogeology*. New Jersey.
- HANTUSH, M.S.; JACOB, C.E. (1955). *Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer*. Transactions, American Geophysical Union, v.36, n.1, pp. 95-100.