

# SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE RICHARDS

*Michael Mannich<sup>1</sup> & Alexandre K. Guetter<sup>2</sup>*

**RESUMO** --- A Equação de Richards é uma equação diferencial parcial parabólica não-linear que governa o processo de infiltração transiente de água no solo. Foi desenvolvida uma solução analítica desta equação para infiltração 1-D em solos homogêneos. Para a condição de contorno inferior foi utilizado potencial capilar prescrito constante, e para a condição na fronteira superior foi usada uma função transiente de infiltração com a forma  $q_B + (q_C - q_B)(e^{-at} - e^{-bt})$ . Relações exponenciais  $K = K_S e^{\alpha\psi}$  e  $\theta = \theta_r + (\theta_S - \theta_r)e^{\alpha\psi}$  foram utilizadas para representar a relação entre condutividade hidráulica em função do potencial capilar e a curva de retenção de umidade do solo, respectivamente. A solução do estado estacionário foi utilizada como condição inicial. São discutidos os comportamentos dos perfis de infiltração em termos do potencial capilar para diferentes curvas de infiltração e parâmetros do solo.

**ABSTRACT** --- The Richard's equation is a non-linear partial differential equation that governs the process of infiltration and flow in non-saturated soils. A new analytical solution was developed for a one-dimensional vertical infiltration in homogeneous soils. The lower boundary condition is a constant pressure head and the upper boundary is given by a transient infiltration function in the form  $q_B + (q_C - q_B)(e^{-at} - e^{-bt})$ . Exponential functional forms  $K = K_S e^{\alpha\psi}$  and  $\theta = \theta_r + (\theta_S - \theta_r)e^{\alpha\psi}$  are used to represent the hydraulic conductivity and pressure relation and the soil water retention curve, respectively. Steady state profiles are used as initial condition. Hydraulic behaviors of homogeneous soils are discussed in terms of pressure head profiles for different infiltration curves and soil parameters.

**Palavras-chave:** Equação de Richards, solução analítica.

---

1) Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental da UFPR. E-mail: mannich@ufpr.br.

2) Professor Adjunto da UFPR, DHS. Curitiba, PR. E-mail: guetter.dhs@ufpr.br.

# 1. INTRODUÇÃO

O conhecimento dos processos de infiltração e movimento de água no solo são importantes para solucionar problemas práticos em áreas como hidrologia, ciência dos solos, irrigação e drenagem, gestão de recursos naturais e outros (Ross, 1990). Para isto, faz-se uso de soluções analíticas ou numéricas da Equação de Richards (Richards, 1931), que governa o escoamento transiente da água em solos (Chow et al., 1988).

A Equação de Richards é uma equação diferencial parcial parabólica não linear cujas soluções analíticas são poucas e difíceis de obter, devido à alta não-linearidade dos parâmetros hidráulicos do solo. A maioria delas deriva de linearizações, baseadas em considerações a respeito dependência da condutividade hidráulica com a umidade do solo (Basha, 2000). A consideração mais comum é a dependência exponencial da condutividade hidráulica e da umidade com o potencial capilar.

Normalmente é necessário confiar nas aproximações numéricas para predição do movimento de água nos solos não saturados devido à raridade de soluções analíticas que retratam condições realistas. Entretanto, esquemas numéricos como elementos finitos e diferenças finitas sofrem de problemas de convergência e balanço de massa (Célia et al., 1990). As soluções analíticas da Equação de Richards podem ser usadas para avaliar e comparar o desempenho e a acurácia de esquemas numéricos (Ross; Parlange, 1994). As soluções analíticas da equação diferencial também oferecem informações importantes sobre a física do fenômeno e permitem identificar a relação e dependência do resultado com as variáveis. Em contrapartida, métodos numéricos, que podem ser ferramentas poderosas para resolver problemas complexos e não-lineares, usualmente não fornecem informações suficientes sobre a solução (Menziani et al., 2006).

Durante as últimas décadas foram desenvolvidas várias soluções analíticas para escoamento não saturado, sob várias condições de contorno e iniciais. Cronologicamente, Philip (1957), Braester (1973), Warrick (1975), Lomen e Warrick (1978), Batu (1982), Batu (1983), Warrick e Lomen (1983), Broadbridge e White (1988), Sander et al. (1988), Broadbridge e Rogers (1990), Warrick et al. (1990), Srivastava e Yeh (1991), Warrick et al. (1991), Warrick e Parkin (1995), Salvucci (1996), Basha (1999), Basha (2000), Chen et al. (2001), Basha (2002), Mannich e Dell'Avanzi (2006) e Menziani et al. (2006), apresentaram soluções analíticas para o escoamento transiente não saturado em meios porosos através de alguma linearização da equação de Richards. No entanto, estas soluções foram obtidas sob condição de fluxo constante na superfície, com exceção de Warrick (1975), Basha (1999, 2002) e Chen (2001). E algumas delas são limitadas a casos com condições iniciais uniformes, domínio infinito ou mais considerações a respeito dos parâmetros hidráulicos. Deste modo é desejável o desenvolvimento de soluções analíticas para o

escoamento não saturado transiente em meios porosos para o caso mais geral possível e sob condições de contorno transientes.

Neste artigo desenvolvemos uma solução analítica para a equação de Richards linearizada para infiltração transiente vertical em solo homogêneo. O perfil de pressões no estado estacionário é utilizado como condição inicial. Na superfície é admitida uma função de infiltração variável no tempo e no contorno inferior é exercido um potencial capilar prescrito.

Este artigo está organizado em 3 sessões: derivação da solução analítica, apresentação de resultados e discussão, conclusões.

## 2. SOLUÇÃO ANALÍTICA

A Equação de Richards, que governa o escoamento não-saturado vertical 1-D é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left[ K_* (\psi) \frac{\partial (\psi + z_*)}{\partial z_*} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t_*} \quad (1)$$

onde,  $z_*$  [L] é a coordenada vertical, positiva no sentido de baixo para cima,  $K_*$  [L/T] é a condutividade hidráulica não saturada que é função do potencial capilar  $\psi$  [L],  $\theta$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a umidade, e  $t_*$  [T] representa o tempo.

A dependência da condutividade hidráulica e da umidade com relação ao potencial capilar são dadas, respectivamente, pelas seguintes relações constitutivas (sendo a primeira proposta por Gardner (1958)):

$$K_* = K_S e^{\alpha \psi} \quad (2)$$

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} \quad (3)$$

onde  $K_S$  [L/T] é a condutividade hidráulica saturada,  $\theta_r$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a de umidade residual,  $\theta_s$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a umidade de saturação, e  $\alpha$  [1/L] é o parâmetro que avalia a pressão de entrada de ar e que representa a taxa de redução da condutividade hidráulica e da umidade para  $\psi$  cada vez menor.

Por conveniência são definidos alguns parâmetros adimensionais:

$$z = \alpha z_* \quad (4)$$

$$K = K_* / K_S \quad (5)$$

$$t = \alpha K_S t_* / (\theta_s - \theta_r) \quad (6)$$

Inserindo os parâmetros adimensionais e as relações dadas pelas equações (2) e (3) na equação (1), esta se torna linear e é escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial t} \quad (7)$$

Aplicando a transformação de Laplace na equação (7) e denotando a transformada de K como  $\bar{K}$ ,  $K_0$  a condição inicial e s a variável de Laplace, pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial z} - s\bar{K} + K_0(z) = 0 \quad (8)$$

A solução da equação requer uma condição inicial e duas condições de contorno. Considerando um solo de comprimento  $L_*$ , a condição de contorno inferior ( $z_* = 0$ ) é potencial capilar prescrito  $\psi_0$ :

$$K(0, t) = e^{\alpha\psi_0} \quad (9)$$

e a condição superior em  $z_* = L_*$  é fluxo prescrito dado pela função:

$$q(t) = q_B^* + (q_C^* - q_B^*) \left( e^{-a_* t_*} - e^{-b_* t_*} \right) \quad (10)$$

onde,  $a_*$  [1/T] e  $b_*$  [1/T] são parâmetros que representam a taxa de redução da infiltração e,  $q_B^*$  e  $q_C^*$  são parâmetros com dimensão de velocidade [L/T]. A aplicação da condição da equação (10) fornece:

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_{z=L} = q_B + (q_C - q_B) \left( e^{-at} - e^{-bt} \right) \quad (11)$$

onde,

$$q_B = q_B^*/K_S \quad \text{e} \quad q_C = q_C^*/K_S \quad (12)$$

$$a = \frac{(\theta_S - \theta_r) a_*}{\alpha K_S} \quad \text{e} \quad b = \frac{(\theta_S - \theta_r) b_*}{\alpha K_S} \quad (13)$$

A condição inicial é a solução da equação (1) em regime estacionário sob condição de fluxo constante  $q_A^*$  na superfície e o mesmo potencial capilar  $\psi_0$  no contorno inferior. A condição pode ser escrita matematicamente como:

$$K(z, 0) = q_A - (q_A - e^{\alpha\psi_0}) e^{-z} = K_0 \quad (14)$$

onde,

$$q_A = q_A^*/K_S \quad (15)$$

Aplicando a transformação de Laplace nas equações (9) e (11) têm-se, respectivamente:

$$\bar{K}(0, t) = e^{\alpha\psi_0} / s \quad (16)$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{K}}{\partial z} + \bar{K} \right]_{z=L} = \frac{q_B}{s} + (q_C - q_B) \left( \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \quad (17)$$

Assim a solução geral da equação (8) no campo de Laplace sujeito às condições dadas pelas equações (16) e (17) é:

$$\bar{K} = \frac{K_0(z)}{s} + e^{(L-z)/2} F(s) \quad (18)$$

onde,

$$F(s) = \left[ \frac{(q_B - q_A)}{s} + \frac{(q_C - q_B)(b-a)}{(s+a)(s+b)} \right] \frac{\sinh \left[ z \left( s + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right]}{\frac{1}{2} \sinh \left[ L \left( s + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right] + \left( s + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \cosh \left[ L \left( s + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right]} \quad (19)$$

E aplicando a transformação inversa de Laplace na equação (19), têm-se:

$$K = K_0(z) + e^{(L-z)/2} \text{TIL} [F(s)] \quad (20)$$

onde, TIL representa a transformada inversa de Laplace.

A inversão de  $F(s)$  é obtida através do teorema dos resíduos (Day, 1960) como a soma dos resíduos de  $e^{st}F(s)$  nos pólos de  $F(s)$ . A equação (19) possui três pólos simples,  $s = 0$ ,  $s = -a$ ,  $s = -b$ .

O resíduo no pólo  $s = 0$  é:

$$R_1 = (q_B - q_A) \left( e^{z/2} - e^{-z/2} \right) e^{-L/2} \quad (21)$$

O resíduo no pólo  $s = -a$  é:

$$R_2 = \begin{cases} \text{se } a < \frac{1}{4}, & \frac{(q_C - q_B) \sinh(zu) e^{-at}}{\frac{1}{2} \sinh(Lu) + u \cosh(Lu)} \\ \text{se } a = \frac{1}{4}, & \frac{2(q_C - q_B) z e^{-t/4}}{L + 2} \\ \text{se } a > \frac{1}{4}, & \frac{(q_C - q_B) \sin(zv) e^{-at}}{\frac{1}{2} \sin(Lv) + v \cos(Lv)} \end{cases} \quad (22)$$

onde,

$$u = (1/4 - a)^{1/2} \quad (23)$$

$$v = |1/4 - a|^{1/2} \quad (24)$$

O resíduo no pólo  $s = -b$  é:

$$R_3 = \begin{cases} \text{se } b < \frac{1}{4}, & -\frac{(q_C - q_B) \sinh(L\mu) e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sinh(L\mu) + \mu \cosh(L\mu)} \\ \text{se } b = \frac{1}{4}, & -\frac{2(q_C - q_B) z e^{-t/4}}{L + 2} \\ \text{se } b > \frac{1}{4}, & -\frac{(q_C - q_B) \sin(z\nu) e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sin(L\nu) + \nu \cos(L\nu)} \end{cases} \quad (25)$$

onde,

$$\mu = (1/4 - b)^{1/2} \quad (26)$$

$$\nu = |1/4 - b|^{1/2} \quad (27)$$

Os outros pólos são obtidos impondo  $(s+1/4)^{1/2}$  como um número complexo  $i\lambda$  de modo que os valores de  $\lambda$  satisfaçam a equação:

$$\tan(\lambda L) + 2\lambda = 0 \quad (28)$$

É fácil observar que apenas os números imaginários puros de  $(s+1/4)^{1/2}$  geram pólos para a equação. Os valores de  $\lambda$  são obtidos como as raízes positivas da equação (28), e os valores negativos são ignorados devido à simetria da solução final e porque  $s$  é o mesmo para valores positivos e negativos de  $\lambda$ . Há infinitas raízes da equação (28) e, portanto, infinitos resíduos:

$$R_4 = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (q_B - q_A) - \frac{(q_C - q_B)(b-a)(4\lambda_n^2 + 1)}{(a - \lambda_n^2 - 1/4)(b - \lambda_n^2 - 1/4)} \right] \frac{\text{sen}(\lambda_n L) \text{sen}(\lambda_n z) e^{-(\lambda_n^2 - 1/4)t}}{1 + L/2 + 2\lambda_n^2 L} \quad (29)$$

Deste modo, a expressão para  $K$  é:

$$K = q_B - (q_B - e^{\alpha\psi_0})e^{-z} + e^{(L-z)/2} [R_2 + R_3 + R_4] \quad (30)$$

Da adimensionalização  $K = e^{\alpha\psi}$  e  $\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)K$  e, portanto, os perfis de potencial capilar e umidade são facilmente obtidos.

A vazão específica que passa a qualquer elevação  $z$  como função do tempo é dada por:

$$q_t = K_S \left[ \frac{\partial K}{\partial z} + K \right]_z = K_S \left\{ q_B + e^{(L-z)/2} [(q_C - q_B)(Q_A - Q_B) - 4Q_S] \right\} \quad (31)$$

onde,

$$Q_A = \begin{cases} \text{se } a < \frac{1}{4}, & \frac{\left[\frac{1}{2} \sinh(zu) + u \cosh(zu)\right] e^{-at}}{\frac{1}{2} \sinh(Lu) + u \cosh(Lu)} \\ \text{se } a = \frac{1}{4}, & \frac{2(1+z/2)e^{-t/4}}{L+2} \\ \text{se } a > \frac{1}{4}, & \frac{\left[\frac{1}{2} \sin(zv) + v \cos(zv)\right] e^{-at}}{\frac{1}{2} \sin(Lv) + v \cos(Lv)} \end{cases} \quad (32)$$

$$Q_B = \begin{cases} \text{se } b < \frac{1}{4}, & \frac{\left[\frac{1}{2} \sinh(z\mu) + \mu \cosh(z\mu)\right] e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sinh(L\mu) + \mu \cosh(L\mu)} \\ \text{se } b = \frac{1}{4}, & \frac{2(1+z/2)e^{-t/4}}{L+2} \\ \text{se } b > \frac{1}{4}, & \frac{\left[\frac{1}{2} \sin(z\nu) + \nu \cos(z\nu)\right] e^{-bt}}{\frac{1}{2} \sin(L\nu) + \nu \cos(L\nu)} \end{cases} \quad (33)$$

$$Q_S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (q_B - q_A) - \frac{(q_C - q_B)(b-a)(4\lambda_n^2 + 1)}{(a - \lambda_n^2 - 1/4)(b - \lambda_n^2 - 1/4)} \right] \times \frac{\sin(\lambda_n L) \left[ \frac{1}{2} \sin(\lambda_n z) + \lambda_n \cos(\lambda_n z) \right] e^{-(\lambda_n^2 - 1/4)t}}{1 + L/2 + 2\lambda_n^2 L} \quad (34)$$

### 3. EXEMPLOS E DISCUSSÃO

As expressões analíticas (30) e (31) dependem dos parâmetros hidráulicos,  $\alpha$ ,  $K_S$ ,  $\theta_S$  e  $\theta_r$ , e dos parâmetros das funções de infiltração,  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $q_C$ ,  $a$  e  $b$ . A combinação destes parâmetros gera diferentes curvas de infiltração. Os perfis de potencial capilar e da vazão específica em  $z = 0$  para um solo hipotético sob influência de várias formas da função de infiltração são discutidos. Para facilitar comparações, para todos os exemplos a espessura da coluna de solo é de 1 m. A umidade saturada e residual é 0,5 e 0,1, respectivamente. A condutividade hidráulica saturada e o valor de  $\alpha$  são assumidos  $3,0 \times 10^{-6}$  m/s e  $10 \text{ m}^{-1}$ , respectivamente, com exceção do primeiro exemplo no qual são comparados dois valores distintos de  $\alpha$ . Apenas os perfis de pressão são apresentados devido à similaridade na forma das curvas dos perfis de umidade, que é conseqüência da linearidade entre as relações constitutivas.

## Exemplo 1

Neste primeiro exemplo adotou-se os parâmetros  $q_B = 0$ ,  $a = 0$  e  $b \rightarrow \infty$ , de modo que a função de infiltração é constante e igual a  $q_C$ , cujo valor é arbitrado como  $2,5 \times 10^{-6}$  m/s. Dois valores de  $\alpha$  são comparados, 1 e  $10 \text{ m}^{-1}$ .

A forma das curvas do perfil de pressões são totalmente diferentes nas Figuras 1 e 2. Para  $\alpha$  pequeno (Figura 1), a infiltração é mais rápida e a frente de molhamento é mais dispersa do que para  $\alpha$  maior (Figura 2). Para  $\alpha$  menor o estado estacionário é alcançado mais rapidamente do que para  $\alpha$  maior.

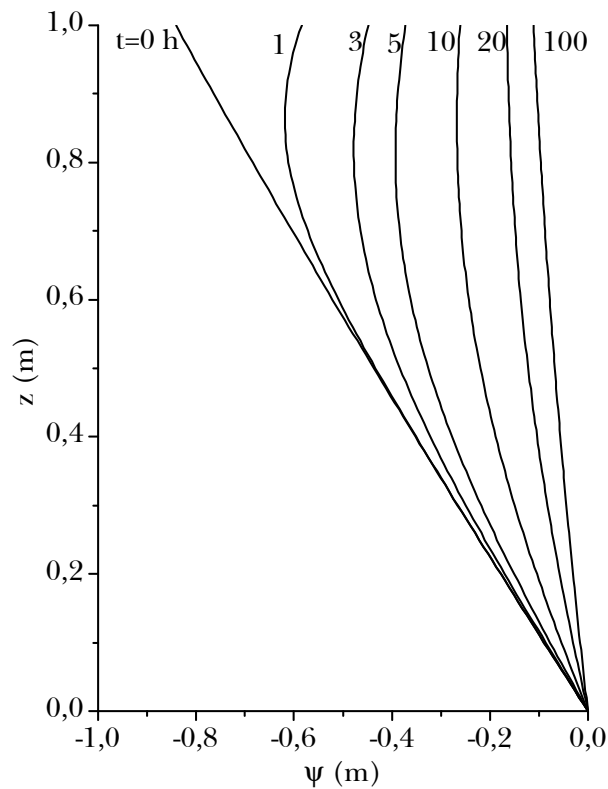


Figura 1 – Perfil de pressões para  $\alpha = 1 \text{ m}^{-1}$  e infiltração constante

A Figura 3 apresenta a infiltração e as vazões de descarga para os dois solos. Para a infiltração constante ao longo do tempo a descarga apresenta um comportamento de crescimento logístico até se igualar a própria infiltração. O solo apresenta um comportamento de reservatório, retardando a vazão de saída.

É interessante observar que para a função de infiltração constante as equações (30) e (31), após simplificações algébricas, tornam-se iguais às obtidas por Srivastava e Yeh (1991).



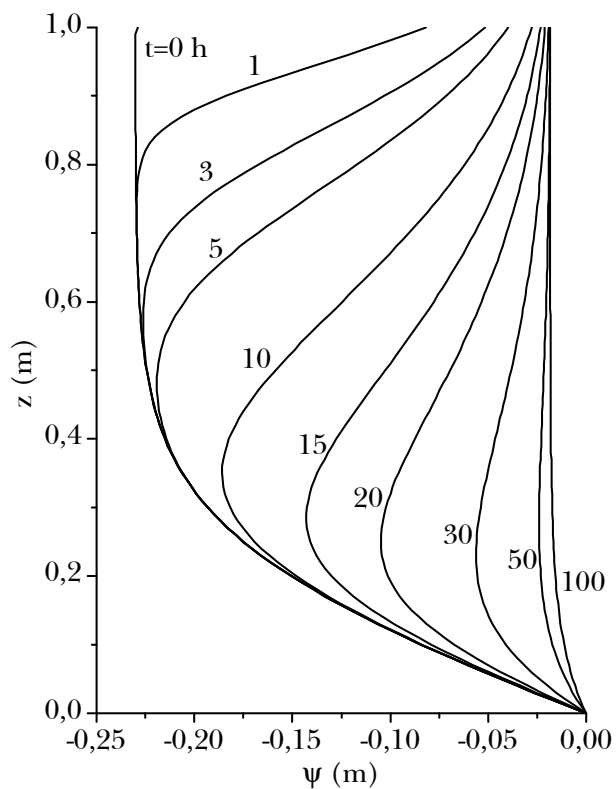


Figura 2 – Perfil de pressões para  $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$  e infiltração constante

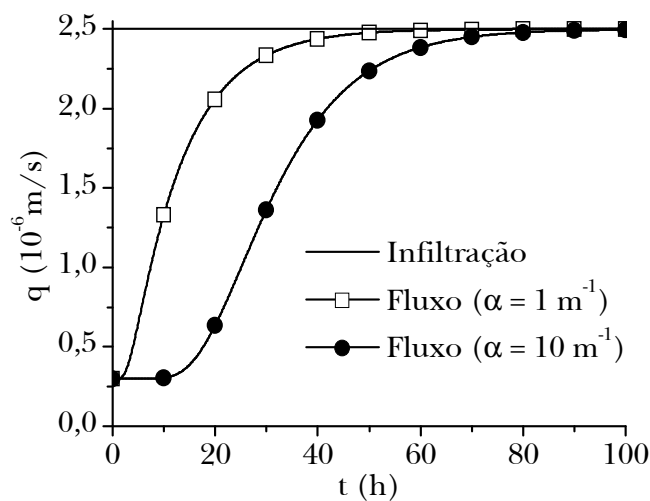


Figura 3 – Curvas de infiltração e vazão específica para  $\alpha = 1 \text{ m}^{-1}$  e  $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$

### Exemplo 2

Neste exemplo os valores atribuídos aos parâmetros são  $q_B = 3,0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ ,  $q_C = 2,5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ ,  $a = 1,0 \times 10^{-5} \text{ hr}^{-1}$  e  $b \rightarrow \infty$ , e deste modo a função de infiltração adquire a forma da função empírica de infiltração de Horton (Bras, 1990).

Na Figura 5 observa-se a curva de infiltração como uma função exponencial (equação de Horton) e a vazão específica com o pico defasado e amortecido. Analisando as Figuras 4 e 5 em conjunto percebe-se que o comportamento de drenagem no solo ocorre por que a partir de um momento a taxa de infiltração passa a ser menor do que a vazão específica na camada inferior do solo, reduzindo a volume de água na camada de solo.

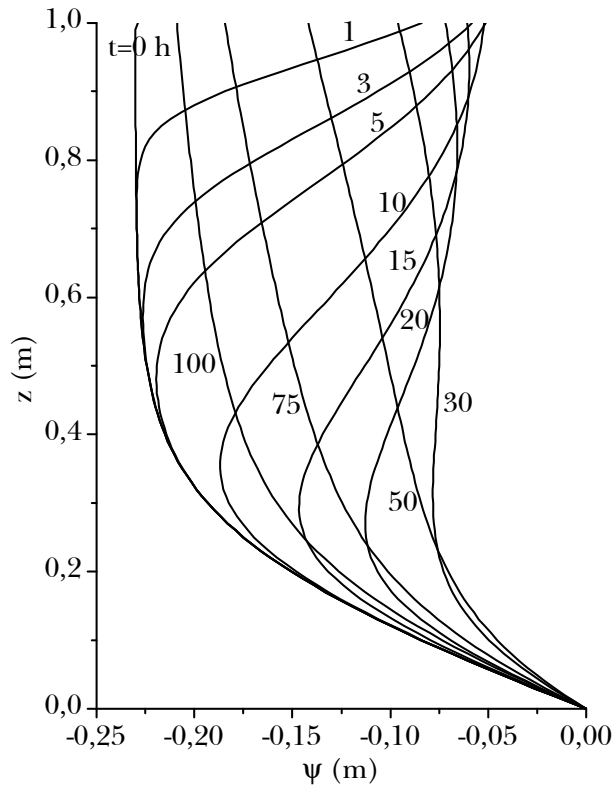


Figura 4 – Perfil de pressões para função de infiltração de Horton

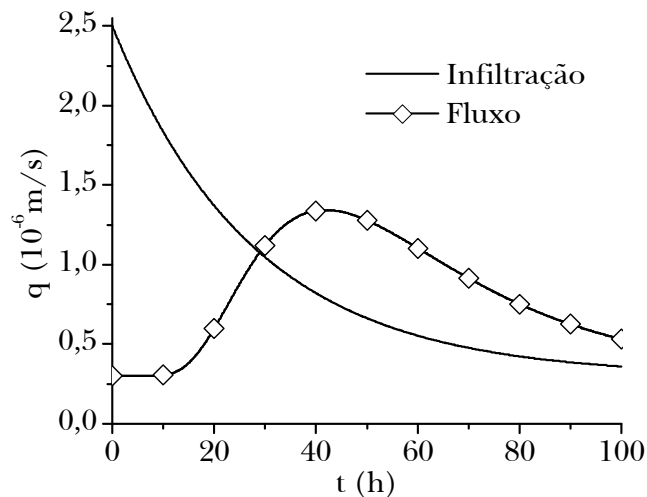


Figura 5 – Curvas de infiltração de Horton e vazão de descarga

### Exemplo 3

Neste exemplo os valores dos parâmetros são  $q_B = 3,0 \times 10^{-7}$  m/s,  $q_C = 2,5 \times 10^{-6}$  m/s,  $a = 1,0 \times 10^{-5}$  hr<sup>-1</sup> e  $b = 1,0 \times 10^{-4}$  hr<sup>-1</sup>, e a função de infiltração assume a forma geral dada pela equação (10). Esta função é uma mistura da função de Horton com uma combinação de duas exponenciais que geram um crescimento rápido até um pico e em seguida um decaimento exponencial mais lento (Figura 7). A Figura 6 apresenta o perfil de infiltração para este exemplo.

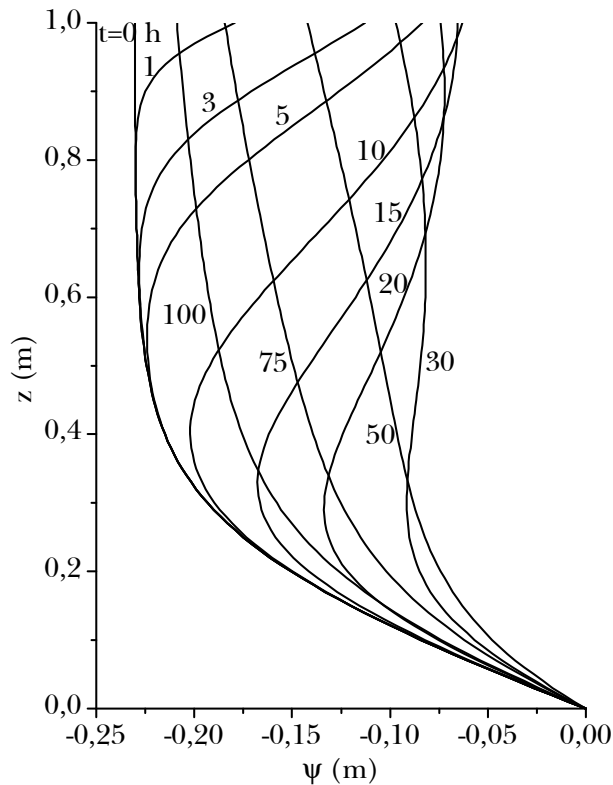


Figura 6 – Perfil de pressões para a função infiltração geral

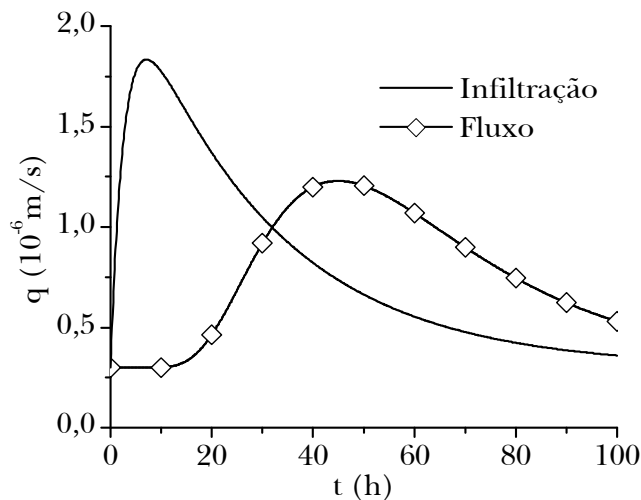


Figura 7 – Curvas de infiltração geral e vazão específica

Os comportamentos da frente de molhamento e da vazão específica no contorno inferior são similares aos do exemplo 2, devido à proximidade entre as características das curvas de infiltração.

#### 4. CONCLUSÕES

A equação de Richards devido a sua elevada não linearidade passou muitos anos após sua divulgação sem soluções analíticas. Após a década de 50 algumas foram desenvolvidas, com um crescente nas últimas 2 décadas. Entretanto, a exploração de condições de contorno transientes é fraca. Isto posto, a solução analítica desenvolvida neste trabalho contribui devido sua novidade e também por empregar uma função de infiltração mais geral, possibilitando interpretações distintas do comportamento do solo frente a uma taxa de infiltração variável com o tempo.

A aplicabilidade da solução analítica desenvolvida é restrita, uma vez que na natureza não se encontram situações idealizadas como solos com propriedades homogêneas nem que se ajustem tão bem às relações constitutivas utilizadas. Em contrapartida, a contribuição dá-se no maior entendimento dos processos físicos envolvidos no movimento de água no solo e a compreensão do efeito dos parâmetros hidráulicos do solo sob o fenômeno de dinâmica de água no solo.

Embora as funções exponenciais utilizadas sejam restritivas para alguns solos e não tão genéricas quanto o modelo proposto por Van Genuchten (1980), elas podem ser aplicadas em muitos casos.

Além disso, as soluções analíticas também podem ser utilizadas para avaliar o desempenho de esquemas numéricos.

#### BIBLIOGRAFIA

BASHA, H. A. (1999). *Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface*. Water Resources Research 35(1), pp. 75-83.

BASHA, H. A. (2000). *Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table*. Water Resources Research 36(9), pp. 2567-2573.

BASHA, H. A. (2002). *Burger's equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution*. Water Resources Research 38(11), pp. 29.1-29.9.

BATU, V. (1982). *Time-dependent, linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and nonperiodic strip sources*. Water Resources Research 18(6), pp. 1725-1733.

BATU, V. (1983). *Time-dependent, linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and periodic strip sources*. Water Resources Research 19(6), pp. 1523-1529.

BRAS, R. L. (1990). *Hydrology: an introduction to hydrologic science*. Addison-Wesley, New York.

- BRAESTER, C. (1973). *Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux*. Water Resources Research 9(3), pp. 687-694.
- BROADBRIDGE, P., and I. WHITE (1988). *Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model I. Analytic Solution*. Water Resources Research 24(1), pp. 145-154.
- BROADBRIDGE, P.; ROGERS, C. (1990). *Exact solutions for vertical drainage and redistribution in soils*. Journal of Engineering Mathematics 24, pp. 25-43.
- CELIA, M. A.; BOULOUTAS, E. F; ZARBA, R. L. (1990). *A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water Resources Research 26(7), pp. 1483-1496.
- CHEN, J. M., Y. C. TAN, C. H. CHEN, and J. Y. PARLANGE (2001). *Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes*. Water Resources Research 37(4), pp. 1091-1093.
- CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- DAY, W. D. (1960). *Introduction to Laplace Transforms for Radio and Electronic Engineers*. Interscience Publishers Inc., New York.
- GARDNER, W. R. (1958). *Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table*. Soil Science 85, pp. 228-332.
- LOMEN, D. O.; WARRICK, A. W. (1978). *Time-dependent solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation with water extraction*. Journal of Hydrology 39, pp. 59-67.
- MENZIANI, M.; PUGNACHI, S.; VINCENZI, S. (2006). *Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions*. Journal of Hydrology 332, pp. 214-225. iss. 1-2.
- MANNICH, M. (2006). *Solução Analítica de Fluxo Transiente Não-Saturado para Avaliação do Potencial de Uso de Solos Repelentes à Água*. In: XIII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica, Curitiba, Brasil.
- MANNICH, M. (2008). *Desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas da equação de Richards*. Dissertação de Mestrado, UFPR, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Curitiba, Brasil.
- PHILIP, J. R. (1957). *The Theory of Infiltration I. The infiltration equation and its solution*. Soil Science 84, pp. 345-357.
- RICHARDS, L. A. (1931). *Capillary conduction of liquids in porous mediums*. Physics 1, pp. 318-333.
- ROSS, P. J. (1990). *Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation*. Water Resources Research 26(2), pp. 279-290.
- ROSS, P. J.; PARLANGE, J. Y. (1994). *Comparing exact and numerical solutions of Richards equation for one-dimensional infiltration and drainage*. Soil Science 157(6), pp. 341-344.
- SALVUCCI, G. D. (1996). *Series solution for Richards equation under concentration boundary conditions and uniform initial conditions*. Water Resources Research 32(8), pp. 2401-2407.
- SANDER, G. C., J. Y. PARLANGE, V. KÜHNEL, W. L. HOGARTH, D. LOCKINGTON, and J. P. K. O'KANE (1988). *Exact nonlinear solution for constant flux infiltration*, Journal of Hydrology 97, pp. 341-346.

SRIVASTAVA, R.; YEH, T. C. J. (1991). *Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils*. Water Resources Research 27(5), pp. 753-762.

VAN GENUCHTEN, M. T. (1980). *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Science Society of America Journal 44, pp. 892-898.

WARRICK, A. W. (1975). *Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input*. Soil Science 120(2), pp. 79-84.

WARRICK, A. W.; ISLAS, A.; LOMEN, D. O. (1991). *An analytical solution to Richards equation for time-varying infiltration*. Water Resources Research 27(5), pp. 763-766.

WARRICK, A. W.; LOMEN, D. O. (1983). *Linearized moisture flow with extraction over two-dimensional zones*. Soil Science Society of America Journal 47, pp. 869-872.

WARRICK, A. W.; LOMEN, D. O.; ISLAS, A. (1990). *An analytical solution to Richards for a draining soil profile*. Water Resources Research 26(2), pp. 253-258.

WARRICK, A. W.; PARKIN, G. W. (1995). *Analytical solution for de one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms*. Water Resources Research 31(11), pp. 2891-2894.