

# MODELAGEM DE SÉRIES DE VAZÕES SAZONAIS APRESENTANDO DEPENDÊNCIA DE LONGO TERMO

*Marisa Cruz Coser<sup>1</sup> & Antonio Sérgio Ferreira Mendonça<sup>2</sup>*

**RESUMO** - Modelos estocásticos periódicos são instrumentos utilizados para determinação das potencialidades e disponibilidades hídricas de cursos d'água, elaboração de projetos de estruturas hidráulicas, como reservatórios e açudes, e planejamento dos tipos de medidas de controle de recursos hídricos. Este artigo apresenta a aplicação de modelos estocásticos com parâmetros periódicos na geração de séries sintéticas de vazões mensais. Foram estudados e aplicados modelos estocásticos periódicos das famílias PAR(p), PARMA(p,q) e PARMA multiplicativo (p,q,P,Q) para séries históricas de vazões mensais das estações **Porto Nacional**, **São Félix de Balsas** e **Castelo**. A partir do ajuste dos modelos às séries históricas, foram escolhidos aqueles que apresentaram melhor desempenho quanto aos testes de normalidade e independência de resíduos, além de apresentarem melhor parcimônia relativa à quantidade de parâmetros. A partir dos resultados obtidos foi concluído que, para as séries históricas estudadas, todos os modelos preservaram médias, desvios padrão, variâncias e autocorrelações periódicas das vazões mensais e os modelos que melhor se aproximaram das autocorrelações anuais faziam parte da família de modelos PARMA multiplicativos. A preservação destas autocorrelações é importante para geração de séries sintéticas que apresentem períodos de secas prolongados, para dimensionamento adequado de reservatórios de estiagem.

**ABSTRACT** - Stochastic periodic models are important tools for water resources availability forecasting, design of hydraulic structures related with reservoirs and ponds, and for planning of many different water resources control actions. This article presents the application of stochastic models periodic parameters in the generation of synthetic monthly flows. There were studies and applied models belonging to PAR(p), PARMA(p,q) and PARMA multiplicative (p,q,P,Q) families to monthly historic series registered in the flow gauging station of the **Porto Nacional**, **São Félix de Balsas** and **Castelo**. After fitting the models to the historical series there were chosen those which presenting best performance during residues normality and independence test, besides being more parsimonious relatively to the number of parameters. It was concluded that all models generated series that preserved historical monthly means, standard deviation, variances and monthly autocorrelation and the models that best approximated annual autocorrelations belonged to the multiplicative PARMA family of models. Preservation of these correlations is important for modeling historical periodic series presenting long term dependence and, hence, for the generation of synthetic monthly presenting long drought periods, for estimating reservoir volumes needed to store water for long drought periods.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem estocástica, vazões mensais, modelos periódicos.

---

“XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos”

1) Professora do IFETES - Instituto Federal Tecnológico do Espírito Santo. Rua Maria de Lourdes P. Labuto, 230, Mata da Praia, Vitória, ES, Brasil. CEP: 29065-540. Tel.: (27) 3315-0005. E-mail: marisa.coser@gmail.com

2) Professor da UFES - Universidade Federal do Espírito Santo. Av. São Paulo, 1890/104, Praia da Costa, Vila Velha, ES, Brasil. CEP: 29101-301. Tel.: (27) 3329-3126. E-mail: anserfm@terra.com.br

## 1. INTRODUÇÃO

Modelagem e simulação de séries temporais de vazões são importantes passos no planejamento e na análise operacional de sistemas de recursos hídricos, como: dimensionamento e operação de reservatórios para irrigação, abastecimento público, produção de energia e aplicações similares (Salas (1993); Sáfadi (2004); Koutsoyiannis (2006)).

O uso da previsão de séries hidrológicas sintéticas no planejamento de sistemas de recursos hídricos surgiu da necessidade de se obter maior confiabilidade nos resultados de análise do comportamento de estruturas hidráulicas sujeitas à influência do regime de vazões de cursos d'água (Sáfadi (2004)).

Como os registros históricos hidrológicos são quase sempre curtos, recorre-se geralmente à técnica de geração de vazões sintéticas, pois a mesma emprega séries de vazões de grande extensão para permitir a estimativa confiável das características do sistema hídrico. Esta técnica não cria nenhuma informação além da contida na série histórica, mas torna o emprego desta informação mais sistemática e eficiente.

A geração de tais seqüências sintéticas de vazões é requerida porque as séries observadas das vazões geralmente não incluem os casos mais extremos de inundações e secas e não podem fornecer boa estimativa dos riscos envolvidos na operação dos sistemas (Moura (2005)).

As séries temporais evoluem no tempo, sujeitas às variações que podem ser descritas por leis probabilísticas. Esse tipo de sistema é objeto da teoria de processos estocásticos. Ou seja, o mecanismo gerador de uma série temporal é um processo estocástico e a série temporal observada, é uma de suas possíveis realizações (Magalhães (2004)).

Análise e previsão de séries de vazões sazonais são de fundamental importância no planejamento da operação de sistemas de recursos hídricos. Uma das dificuldades na previsão dessas séries é a natureza não estacionária devido aos períodos de cheia e seca do ano. Estas previsões são realizadas atualmente por metodologias baseadas nos modelos de Box & Jenkins, (1976). Para modelagem de séries de vazões mensais, que são sazonais com periodicidade de 12 meses e apresentam, geralmente, correlações periódicas, têm sido utilizados modelos auto-regressivos periódicos ((McLeod (1994); Vecchia (1985)).

De acordo com Mendonça (1987), vazões sazonais resultam de uma complexa interação de muitas variáveis, sendo muitas delas dependentes de características das respectivas bacias hidrográficas. Muitos modelos foram desenvolvidos para geração de séries hidrológicas sintéticas que podem preservar propriedades estatísticas particulares de séries históricas. Ao modelador cabe decidir quais estatísticas devem ser preservadas, em função do uso futuro do modelo. As características da bacia e os objetivos da modelagem estocástica indicam qual grupo de modelos, com diferentes graus de sofisticação, deve ser usado pelo hidrólogo.

O presente artigo apresenta análise e aplicação de modelos estocásticos periódicos e estocásticos periódicos multiplicativos a séries de vazões médias mensais com dependência de longo termo.

## 2. MODELOS ESTOCÁSTICOS

Uma metodologia de previsão que é classificada como clássica é a modelagem Box & Jenkins que fundamenta-se na construção de funções baseadas em um ciclo iterativo que utiliza os próprios dados da série para encontrar uma estrutura que permita fazer previsões.

Três tipos de modelos foram usados, no presente estudo, para modelagem de séries de vazões mensais: modelo auto-regressivo periódico (PAR), modelo auto-regressivo periódico de média móvel (PARMA) e modelo auto-regressivo e de média móvel multiplicativo (PMIX), apresentados a seguir:

### Modelos Auto-Regressivos Periódicos – PAR(p)

Modelos auto-regressivos com p parâmetros periódicos, PAR(p), são aqueles nos quais alguns ou todos os seus parâmetros variam dentro do ano.

Um modelo PAR(p) com média e variância periódicas e com coeficientes auto-regressivos periódicos é representado por ((Salas (2002); Righetto (1998)):

$$y_{v,\tau} = \mu_{\tau} + \sigma_{\tau} \cdot z_{v,\tau} \quad (1)$$

onde:

$$z_{v,\tau} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} \cdot z_{v,\tau-j} + \sigma_{\varepsilon\tau} \xi_{v,\tau} \quad (2)$$

e  $y_{v,\tau}$  é a variável dependente para o ano  $v$  e o período  $\tau$  com  $\tau = 1, \dots, w$  e  $w$  é o número de períodos dentro do ano. A variável  $y_{v,\tau}$  é assumida com distribuição normal com média  $\mu_\tau$  e variância  $\sigma_\tau^2$ ,  $\phi_{j,\tau}$  é o  $j$ -ésimo coeficiente periódico auto-regressivo no período  $\tau$ ,  $\sigma_{\varepsilon\tau}$  é um coeficiente periódico,  $\xi_{v,\tau}$  é a variável normal padronizada. O conjunto de parâmetros do modelo é  $\{\mu_\tau, \sigma_\tau^2, \phi_{1,\tau}, \dots, \phi_{p,\tau}, \sigma_{\varepsilon\tau}^2; \tau = 1, \dots, w\}$  que deve ser estimado a partir dos dados observados.

Os valores esperados e as variâncias das variáveis dependentes e independentes são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E(y_{v,\tau}) &= \mu_\tau & , \tau = 1, \dots, w \\ E(z_{v,\tau}) &= E(\xi_{v,\tau}) = 0 & , \tau = 1, \dots, w \\ Var(y_{v,\tau}) &= \sigma_\tau^2 & , \tau = 1, \dots, w \\ Var(z_{v,\tau}) &= Var(\xi_{v,\tau}) = 1 & , \tau = 1, \dots, w \end{aligned}$$

Conforme Maidment (1993), o modelo PAR(p) com média e variância periódicas e com coeficientes auto-regressivos periódicos também pode ser definido como:

$$y_{v,\tau} = \mu_\tau + \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} (y_{v,\tau-j} - \mu_{\tau-j}) + \varepsilon_{v,\tau} \quad (3)$$

Onde:

$y_{v,\tau}$  é a variável dependente para o ano  $v$  e o período  $\tau$  com  $\tau = 1, \dots, w$  e  $w$  é o número de períodos dentro do ano.

$\mu_\tau$  é a média e  $\phi_{j,\tau}$  os coeficientes periódicos auto-regressivos.

$\varepsilon_{v,\tau}$  variável normal e independente com média zero e variância  $\sigma_\tau^2(\varepsilon)$ .

Os parâmetros do modelo são  $\{\mu_\tau, \sigma_\tau^2, \phi_{1,\tau}, \dots, \phi_{p,\tau}, \sigma_\tau^2(\varepsilon); \tau = 1, \dots, w\}$ , que devem ser estimados a partir dos dados observados.

### **Modelos Auto-Regressivos de Médias Móveis Periódicos – PARMA(p,q)**

Os modelos auto-regressivos de média móvel periódicos com parâmetros  $p$  e  $q$ , denominados PARMA(p,q), são mistos, compostos por termos de modelos auto-regressivos e de termos de

modelos de médias móveis. Possui grande flexibilidade para se ajustarem às séries hidrológicas de vazões (Maidment (1993)), podendo ser representado por:

$$y_{v,\tau} = \mu_{\tau} + \sum_{j=1}^p \phi_{j,\tau} (y_{v,\tau-j} - \mu_{\tau-j}) + \varepsilon_{v,\tau} - \sum_{i=1}^q \theta_{i,\tau} \varepsilon_{v,\tau-i} \quad (4)$$

onde:

$y_{v,\tau}$  é a variável dependente para o ano  $v$  e o período  $\tau$  com  $\tau = 1, \dots, \omega$  e  $\omega$  é o número de períodos dentro do ano.

$\mu_{\tau}$  são as médias,  $\phi_{j,\tau}$  os coeficientes periódicos auto-regressivos e  $\theta_{i,\tau}$  os coeficientes periódicos média móvel.

$\varepsilon_{v,\tau}$  variável normal e independente com média zero e variância  $\sigma_{\tau}^2(\varepsilon)$ .

### **Modelo Auto-Regressivo e de Média Móvel Multiplicativo – Multiplicativo PARMA (p,q)x(PQ)<sub>w</sub>**

Box e Jenkins (1976) mostraram que, para dados mensais, há dois intervalos de grande importância que são o mês e o ano. Espera-se daí que haja duas importantes relações: uma entre dados para sucessivos meses de um ano e outra entre dados de um mês de consecutivos anos. Essa era a idéia original dos modelos ARIMA e modelos multiplicativos ARIMA, porém esses não reproduzem bem a variâncias periódicas e autocorrelações periódicas. Modelos PARMA de ordem baixa preservam as características anuais periódicas para séries apresentando baixa dependência anual, entretanto, geralmente não reproduzem autocorrelação anual para séries com alta dependência.

Mendonça (1987) desenvolveu um modelo PARMA multiplicativo, denominado PMIX, que, além de preservar as características sazonais, melhora a preservação de dependência anual.

A denominação PARMA multiplicativo vem do fato de que membros dessa nova classe apresentam parâmetros periódicos relacionando consecutivas estações em um mesmo ano, como os modelos PARMA fazem, e parâmetros periódicos relacionando estações para consecutivos anos, como uma generalização dos modelos multiplicativos Box-Jenkins, que apresentam parâmetros constantes relacionando as mesmas estações.

O modelo foi derivado de um modelo multiplicativo ARIMA  $(p,d,q) \times (P,D,Q)_w$ . Clarke (1973) afirmou que na prática modelos  $d=D=0$  devem provavelmente ser regras em muitas aplicações hidrológicas. Neste caso, as diferenciações de parâmetros são assumidas nulas na Equação 5, resultando na Equação 6.

$$\Phi(B^w) \phi(B)(1 - B^w)^D (1 - B)^d x_t = \Theta(B^w) \theta(B)\varepsilon_t \quad (5)$$

$$\Phi_p(B^w) \phi_p(B)Y_t = \Theta_Q(B^w) \theta_q(B)\varepsilon_t \quad (6)$$

Explicitando a Equação 6, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \phi_{1,\tau}B - \phi_{2,\tau}B^2 - \dots - \phi_{p,\tau}B^p\right] \left[1 - \Phi_{1,\tau}B^w - \Phi_{2,\tau}B^{2w} - \dots - \Phi_{p,\tau}B^{pw}\right] y_{v,\tau} = \\ & \left[1 - \theta_{1,\tau}B - \theta_{2,\tau}B^2 - \dots - \theta_{q,\tau}B^q\right] \left[1 - \Theta_{1,\tau}B^w - \Theta_{2,\tau}B^{2w} - \dots - \Theta_{Q,\tau}B^{Qw}\right] \varepsilon_{v,\tau} \end{aligned} \quad (7)$$

sendo  $y_{v,\tau} = z_{v,\tau} - \mu_\tau$

$z_{v,\tau}$  representa a série histórica e  $\mu_\tau$  representa a média sazonal de  $z_{v,\tau}$ .

$$\begin{aligned} B(y_{v,\tau}) &= y_{v,\tau-1} & B^p(y_{v,\tau}) &= y_{v,\tau-p} \\ B(\varepsilon_{v,\tau}) &= \varepsilon_{v,\tau-1} & B^q(\varepsilon_{v,\tau}) &= \varepsilon_{v,\tau-q} \\ B^w(y_{v,\tau}) &= y_{v-1,\tau} & B^{pw}(y_{v,\tau}) &= y_{v-p,\tau} \\ B^w(\varepsilon_{v,\tau}) &= \varepsilon_{v-1,\tau} & B^{Qw}(\varepsilon_{v,\tau}) &= \varepsilon_{v-Q,\tau} \end{aligned}$$

A Equação 7 representa o modelo geral PARMA multiplicativo  $(p,q) \times (P,Q)_w$  ou PMIX $(p,q,P,Q)$  na qual  $\varepsilon_{v,\tau}$  são resíduos com valor esperado zero e  $w$  é o número de estações. O modelo PARMA multiplicativo, de ordem  $(p,q) \times (P,Q)_w$ , pode ser explicitado como segue:

$$\begin{aligned}
y_{v,\tau} = & \phi_{1,\tau} y_{v,\tau-1} + \phi_{2,\tau} y_{v,\tau-2} + \dots + \phi_{p,\tau} y_{v,\tau-p} \\
& + \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau} + \Phi_{2,\tau} y_{v-2,\tau} + \dots + \Phi_{p,\tau} y_{v-p,\tau} \\
& - \phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau-1} - \phi_{1,\tau} \Phi_{2,\tau} y_{v-2,\tau-1} - \dots \\
& - \phi_{1,\tau} \Phi_{p,\tau} y_{v-p,\tau-1} - \dots - \phi_{p,\tau} \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau-p} \\
& - \phi_{p,\tau} \Phi_{2,\tau} y_{v-2,\tau-p} - \dots - \phi_{p,\tau} \Phi_{p,\tau} y_{v-p,\tau-p} \\
& + \varepsilon_{v,\tau} \\
& - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-1} - \theta_{2,\tau} \varepsilon_{v,\tau-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{v,\tau-q} \\
& - \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau} - \Theta_{2,\tau} \varepsilon_{v-2,\tau} - \dots - \Theta_{Q,\tau} \varepsilon_{v-Q,\tau} \\
& + \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau-1} + \theta_{1,\tau} \Theta_{2,\tau} \varepsilon_{v-2,\tau-1} + \dots \\
& + \theta_{1,\tau} \Theta_{Q,\tau} \varepsilon_{v-Q,\tau-1} + \dots + \theta_{q,\tau} \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau-q} \\
& + \theta_{q,\tau} \Theta_{2,\tau} \varepsilon_{v-2,\tau-q} - \dots - \theta_{q,\tau} \Theta_{Q,\tau} \varepsilon_{v-Q,\tau-q}
\end{aligned} \tag{8}$$

Onde os parâmetros  $\phi_{1,\tau}$ ,  $\phi_{2,\tau}$  e  $\phi_{p,\tau}$  são os coeficientes auto-regressivos periódicos de Lag 1, Lag 2, ...,Lag p, respectivamente, e  $\Phi_{1,\tau}$ ,  $\Phi_{2,\tau}$  e  $\Phi_{p,\tau}$  são os coeficientes auto-regressivos periódicos de Lag w, Lag 2w, ...,Lag Pw.

Os parâmetros  $\theta_{1,\tau}$ ,  $\theta_{2,\tau}$  e  $\theta_{q,\tau}$  são os coeficientes médias móveis para os Lag 1, Lag 2,...,Lag q, respectivamente, enquanto  $\Theta_{1,\tau}$ ,  $\Theta_{2,\tau}$  e  $\Theta_{Q,\tau}$  são os coeficientes médias móveis de Lag w, Lag 2w, ...,Lag Qw.

$y_{v,\tau}$  e  $\varepsilon_{v,\tau}$  apresentam média zero e variâncias  $\sigma_y^2$  e  $\sigma_\varepsilon^2$ , respectivamente.

Um modelo simples, PMIX(1,1,1,1) é um PARMA multiplicativo (p,q)x(P,Q)<sub>w</sub>, assumindo p = q = P = Q = 1, escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
y_{v,\tau} = & \phi_{1,\tau} y_{v,\tau-1} + \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau} - \phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau-1} + \varepsilon_{v,\tau} \\
& - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-1} - \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau} + \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau-1}
\end{aligned} \tag{9}$$

A variável  $y_{v,\tau}$  apresenta média sazonal zero. O PMIX(1,1,1,1) apresenta um conjunto de parâmetros  $\{\phi_{1,\tau}, \Phi_{1,\tau}, \theta_{1,\tau}, \Theta_{1,\tau}, \sigma_\varepsilon^2, \tau=1,\dots, w\}$  que podem ser estimados dos dados.

A expressão para a variância sazonal de  $y_{v,\tau}$  para o modelo PARMA multiplicativo (1,1)x(1,1)<sub>w</sub>, que é o mais simples modelo apresentando todos os parâmetros  $\phi$ 's,  $\Phi$ 's,  $\theta$ 's,  $\Theta$ 's pode ser obtida multiplicando todos os termos da expressão 9 por  $y_{v,\tau}$ :

$$\begin{aligned} y_{v,\tau} y_{v,\tau} &= \phi_{1,\tau} y_{v,\tau-1} y_{v,\tau} + \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau} y_{v,\tau} - \phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau} y_{v-1,\tau-1} y_{v,\tau} \\ &+ \varepsilon_{v,\tau} y_{v,\tau} - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-1} y_{v,\tau} - \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau} y_{v,\tau} + \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} \varepsilon_{v-1,\tau-1} y_{v,\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo a equação 9 na equação 10 e tomando os valores esperados resulta a seguinte expressão para a variância do modelo PARMA multiplicativo (1,1)x(1,1)<sub>w</sub>:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\tau}^2(y) [1 - \Phi_{1,\tau}^2 - \Theta_{1,\tau}^2] \\ &- \sigma_{\tau-1}^2(y) [\phi_{1,\tau}^2 + \phi_{1,\tau}^2 \Phi_{1,\tau}^2 + \theta_{1,\tau}^2 + \theta_{1,\tau}^2 \Theta_{1,\tau}^2] = \\ &\sigma_{\tau}^2(\varepsilon) [1 - 2\phi_{1,\tau} \Theta_{1,\tau}] \\ &- 2\sigma_{\tau-1}^2(\varepsilon) [\phi_{1,\tau} \theta_{1,\tau} + \phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau} \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau}] \\ &+ \sigma_{\tau-1}^2(\varepsilon) [\phi_{1,\tau} \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} [\phi_{1,\tau} + \Phi_{1,\tau}]] \\ &+ 2\phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau} r_{w-1,\tau-1} - 2\phi_{1,\tau}^2 \Phi_{1,\tau} r_{w,\tau-1} - 2\phi_{1,\tau} \Phi_{1,\tau}^2 r_{1,\tau} \\ &- 2\phi_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} E(\varepsilon_{v-1,\tau} y_{v,\tau-1}) + 2\phi_{1,\tau} \theta_{1,\tau} \Theta_{1,\tau} E(\varepsilon_{v-1,\tau-1} y_{v,\tau-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

$r_{v,\tau}$  representa as estimativas de autocorrelações sazonais e  $E$  representa o valor esperado.

O modelo geral PARMA multiplicativo apresenta grande número de parâmetros se as ordem dos parâmetros p, q, P e Q forem maior que 1.

O número total de parâmetros pode ser calculado por:

$$NP = (p + q + P + Q + 1) w \quad (12)$$

Grande número de parâmetros no modelo dificulta o procedimento de estimação, portanto, para aplicações práticas é necessário fazer suposições que reduzam o número de parâmetros do modelo, conservando as mais importantes relações incorporadas no modelo. Razoáveis suposições para relações com seqüências hidrológicas são:



1. Os parâmetros mais importantes são aqueles relacionando valores para duas estações consecutivas em um mesmo ano (“Lag 1”) e aqueles relacionando valores para a mesma estação em anos consecutivos (“Lag w”) (Box e Jenkins (1976)).

2. Se, junto com os parâmetros anteriores, outros são levados em consideração, esses devem ser inicialmente os parâmetros relacionados com auto-regressão entre dados para diferentes “Lags” (em ordem crescente), das estações no mesmo ano.

### 3. ESTIMAÇÃO E ANÁLISE DOS MODELOS

Os modelos pertencentes às famílias PAR(1), PAR(2), PARMA(1,1), PMIX(1,0,0,0), PMIX(1,1,0,0), PMIX(1,0,1,0), PMIX(1,1,1,0), PMIX(2,0,0,0), PMIX(2,0,1,0), PMIX(2,1,1,0) foram aplicados aos dados de vazões mensais das estações fluviométricas de **Porto Nacional** (Rio Tocantins), localizada na Bacia do Tocantins Araguaia e com área de drenagem de 175.360 km<sup>2</sup>; de **São Félix de Balsas** (Rio das Balsas), localizada na Bacia do Atlântico Norte Nordeste e com área de drenagem 22.800 km<sup>2</sup> e de **Castelo** (Rio Castelo), localizada na Bacia do Atlântico Leste e com área de drenagem de 975 km<sup>2</sup>. Os dados de vazões médias mensais das estações supracitadas referentes a períodos de 47, 39 e 66 anos, respectivamente, foram obtidos através do site da Agência Nacional das Águas (<http://www.ana.gov.br/>).

Forte componente sazonal e variabilidade são observadas nas séries de vazões médias mensais das estações em estudo como mostrado nas Figuras 1, 2 e 3.

Segundo Salas *et al.* (1980) e Righetto (1998), a transformação de série hidrológica assimétrica em uma série normalmente distribuída pode ser realizada com o uso de várias funções, sendo que, transformações logarítmicas são as mais utilizadas. No presente estudo, realizou-se transformações logarítmicas das séries de vazões mensais, conforme apresentado por Salas *et al.* (2002).

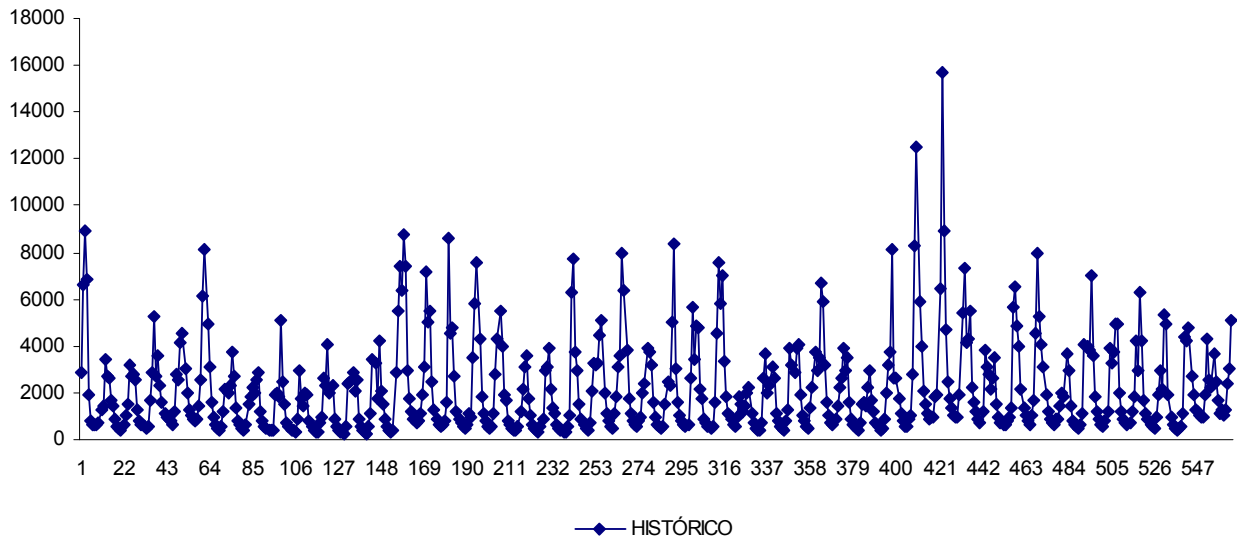


Figura 1 - Série histórica da Estação Porto Nacional

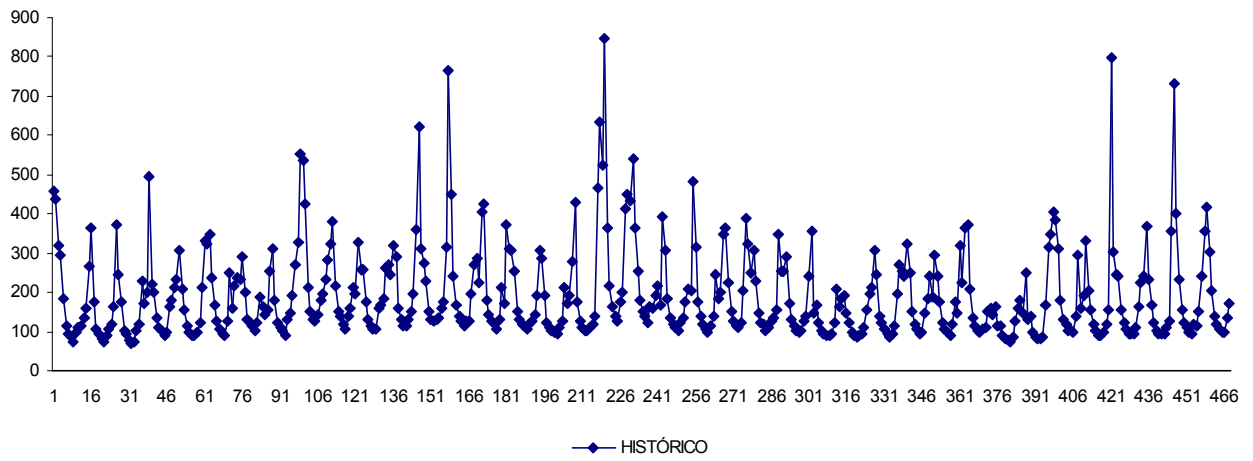


Figura 2 - Série histórica da Estação São Félix de Balsas

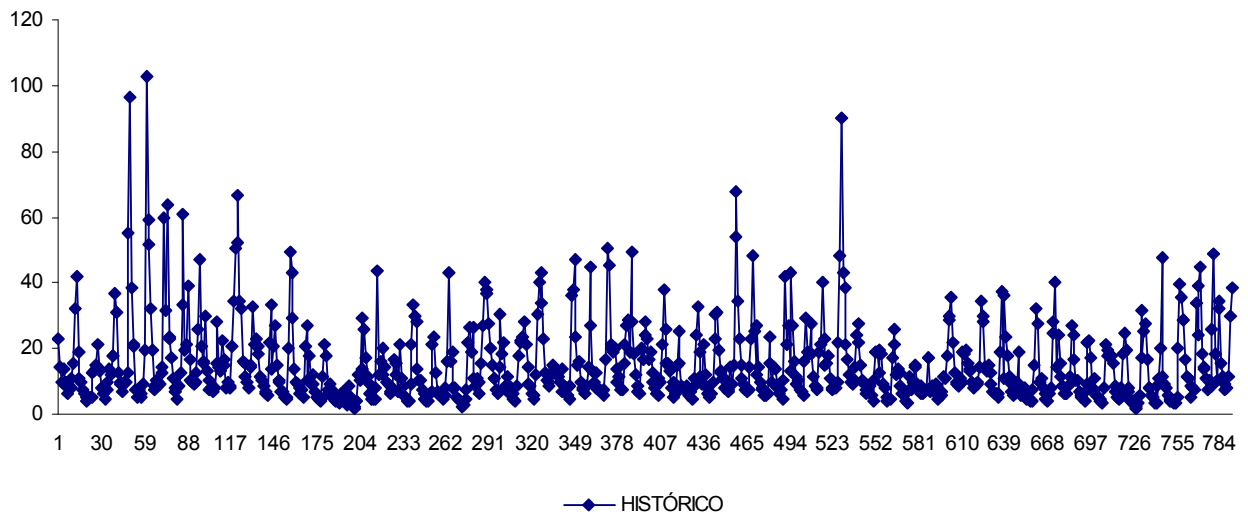


Figura 3 - Série histórica da Estação Castelo

Parâmetros dos modelos PAR e PARMA foram estimados com o uso do método dos momentos enquanto que os do PMIX foram estimados com o uso do algoritmo de Powell. O algoritmo de Powell consiste em um método de direções conjugadas que utiliza buscas unidirecionais nas direções de pesquisa (as direções iniciais são fornecidas pelos eixos coordenados), sendo que após pesquisa em todas as direções, uma nova direção de busca é gerada para acelerar o processo de minimização: a direção conjugada (Silva *et al.* (1998)).

Após a estimação de parâmetros, foi verificado se os modelos respeitavam as hipóteses de normalidade e independência dos resíduos e se os mesmos reproduziam adequadamente as características da série histórica.

As condições de normalidade dos resíduos foram analisadas observando se os coeficientes de assimetria dos resíduos estavam dentro dos limites estabelecidos por Salas *et al.*(1980). Para análise de independência dos resíduos foi utilizado o teste de Portmanteau, sendo calculadas as estatísticas  $Q$ , através da equação 13.

$$Q = Nw \sum_{k=1}^L r_k^2(\varepsilon') \quad (13)$$

$N$  é o número de anos,  $w$  é o número de períodos, que no caso de séries mensais é 12,  $r_k(\varepsilon')$  é a correlação dos resíduos de lag  $k$  e  $L$  é o número máximo de lags considerados. Geralmente  $L = 0,25N.w$ . A distribuição para  $Q$  é assumida aproximadamente qui-quadrada com  $L - N_p$  graus de liberdade.  $N_p$  simboliza o número de parâmetros do modelo.

A adequação do modelo usando o teste  $Q$  pode ser verificada comparando-se a estatística  $Q$  com o valor qui-quadrado  $\chi^2(L - N_p)$ , para um dado nível de significância. Se  $Q < \chi^2(L - N_p)$ ,  $\varepsilon_t$  é considerado uma série independente e o modelo é considerado adequado. Caso contrário, o modelo seria inadequado.

Após verificadas as condições de normalidade e independência foram selecionados os modelos que melhor se ajustaram às séries de vazões mensais através dos Critérios de Informação Bayesiana (BIC) (Schwartz (1978)), com o uso da equação 14, considerando a parcimônia de parâmetros:

$$BIC = \left( \sum_{\tau=1}^w -2 \log L_{\tau} \right) + [w(N+2) + \delta] \log(Nw) \quad (14)$$

$$\log L_{\tau} = -N \log \hat{\sigma}_{\tau}^2(\varepsilon) + (\alpha - 1) \sum_{v=1}^N \log z_{v,\tau} \quad (15)$$

sendo:

$\hat{\sigma}^2_\tau(\varepsilon)$  é a variância estimada para os resíduos;  $\alpha$  é o parâmetro de transformação Box-cox ( $\delta=0$  se  $\alpha=1$  e  $\delta=1$  se  $\alpha \neq 1$ );  $N$  é o número de anos e  $w$  o número de meses.

Este critério leva em consideração não somente a qualidade do ajuste, mas também penaliza a inclusão de parâmetros extras. Assim, um modelo com mais parâmetros pode ter um ajuste melhor, mas não necessariamente ser preferível em termos de critério de informação (Ehlerds (2003)). O critério utilizado neste trabalho para seleção do modelo de melhor ajuste considerou os valores de BIC.

Os parâmetros dos modelos selecionados foram utilizados para a geração de séries sintéticas mensais apresentando 10.000 anos. Este tamanho foi adotado visando maior precisão de estimativas de parâmetros das séries sintéticas, para comparação com os respectivos parâmetros das séries históricas. Foram gerados gráficos comparativos das vazões mensais médias, desvios padrão mensais, autocorrelações anuais e autocorrelações mensais “Lag1” das séries históricas e sintéticas, para verificação dos ajustes.

#### 4. RESULTADOS

Na verificação da validade dos modelos, quanto ao cumprimento da hipótese de normalidade dos resíduos, foi observado que os coeficientes de assimetria das suas séries se situaram dentro dos respectivos limites, confirmando a hipótese.

Quanto à verificação do cumprimento da hipótese de independência, através do Teste de Portmanteau, na Tabela 1 são apresentados os valores dos limites Qui-quadrados e os valores Q calculados a partir dos resíduos, para os diversos modelos. Os valores que passaram no teste são apresentados em negrito.

Tabela 1 – Estatísticas do teste de Portmanteau e critério de seleção Bayesian (BIC)

ESTAÇÃO	MODELO	TESTE PORTMANTEAU		CRITÉRIO DE SELEÇÃO
		Qui-quadrado limite	Q	Bayesian(BIC)
Porto Nacional	PAR(1)	156,22	<b>118,32</b>	-431,68 <sup>(3)</sup>
	PAR(1,1)	142,96	<b>99,92</b>	-404,79 <sup>(5)</sup>
	PAR(2)	142,96	155,15	-400,57 <sup>(7)</sup>
	PMIX(1,0,0,0)	156,22	<b>127,34</b>	<b>-461,74</b> <sup>(1)</sup>
	PMIX(1,0,1,0)	142,96	<b>113,56</b>	-403,61 <sup>(6)</sup>
	PMIX(1,1,0,0)	142,96	<b>142,52</b>	-430,74 <sup>(4)</sup>
	PMIX(1,1,1,0)	129,64	<b>124,69</b>	-372,27 <sup>(9)</sup>
	PMIX(2,0,0,0)	142,96	<b>135,58</b>	-437,70 <sup>(2)</sup>
	PMIX(2,0,1,0)	129,64	<b>124,59</b>	-377,68 <sup>(8)</sup>
PMIX(2,1,1,0)	116,46	130,62	-297,98 <sup>(10)</sup>	
São Félix de Balsas	PAR(1)	129,64	<b>126,02</b>	-302,28 <sup>(2)</sup>
	PAR(1,1)	116,46	<b>108,69</b>	-257,21 <sup>(6)</sup>
	PAR(2)	116,46	<b>98,25</b>	-253,48 <sup>(7)</sup>
	PMIX(1,0,0,0)	129,64	<b>123,52</b>	<b>-312,18</b> <sup>(1)</sup>
	PMIX(1,0,1,0)	116,46	118,55	-261,66 <sup>(5)</sup>
	PMIX(1,1,0,0)	116,46	<b>107,14</b>	-268,45 <sup>(3)</sup>
	PMIX(1,1,1,0)	103,02	<b>98,43</b>	-216,49 <sup>(8)</sup>
	PMIX(2,0,0,0)	116,46	<b>105,22</b>	-262,90 <sup>(4)</sup>
	PMIX(2,0,1,0)	103,02	106,41	-205,83 <sup>(9)</sup>
PMIX(2,1,1,0)	89,36	<b>89,05</b>	-184,31 <sup>(10)</sup>	
Castelo	PAR(1)	218,54	<b>189,18</b>	-367,01 <sup>(2)</sup>
	PAR(1,1)	205,50	434,34	-327,03 <sup>(5)</sup>
	PAR(2)	205,50	<b>203,62</b>	-323,31 <sup>(6)</sup>
	PMIX(1,0,0,0)	218,54	<b>185,47</b>	<b>-377,23</b> <sup>(1)</sup>
	PMIX(1,0,1,0)	205,50	<b>179,22</b>	-312,87 <sup>(7)</sup>
	PMIX(1,1,0,0)	205,50	<b>171,14</b>	-343,78 <sup>(3)</sup>
	PMIX(1,1,1,0)	192,42	<b>164,40</b>	-277,98 <sup>(8)</sup>
	PMIX(2,0,0,0)	205,50	<b>163,94</b>	-331,59 <sup>(4)</sup>
	PMIX(2,0,1,0)	192,42	<b>158,76</b>	-270,02 <sup>(9)</sup>
PMIX(2,1,1,0)	179,30	<b>147,14</b>	-232,43 <sup>(10)</sup>	

Na Tabela 1 são apresentados, também, os valores de BIC calculados para os diferentes modelos ajustados às três séries de vazões, sendo apresentado em negrito o menor valor.

Os valores apresentados na Tabela 1 indicam que, para todas as três séries de vazões mensais, os modelos PAR(1), PMIX(1,0,0,0), PMIX(1,1,0,0), PMIX(1,1,1,0) e PMIX(2,0,0,0) passaram no teste de Portmanteau, de independência de resíduos. Para a estação Porto Nacional, os modelos PAR(2) e PMIX(2,1,1,0) não passaram no mesmo teste. O mesmo ocorreu, relativamente a estação São Félix de Balsas, para os modelos PMIX(1,0,1,0) e PMIX(2,0,1,0) e relativamente a estação Castelo para o modelo PAR(1,1).

Quanto ao critério relacionado com parcimônia dos parâmetros, considerando os valores de BIC, o modelo PMIX(1,0,0,0), correspondente ao PAR(1), com parâmetros estimados através do

algoritmo de Powell, e que apresenta a menor quantidade de parâmetros, foi o que apresentou o menor valor.

As Figuras 1 a 9 mostram gráficos comparativos entre os valores de vazões mensais, desvios padrão mensais e autocorrelações mensais “Lag1” médios, das séries históricas e das séries sintéticas geradas pelos diferentes modelos estocásticos periódicos.

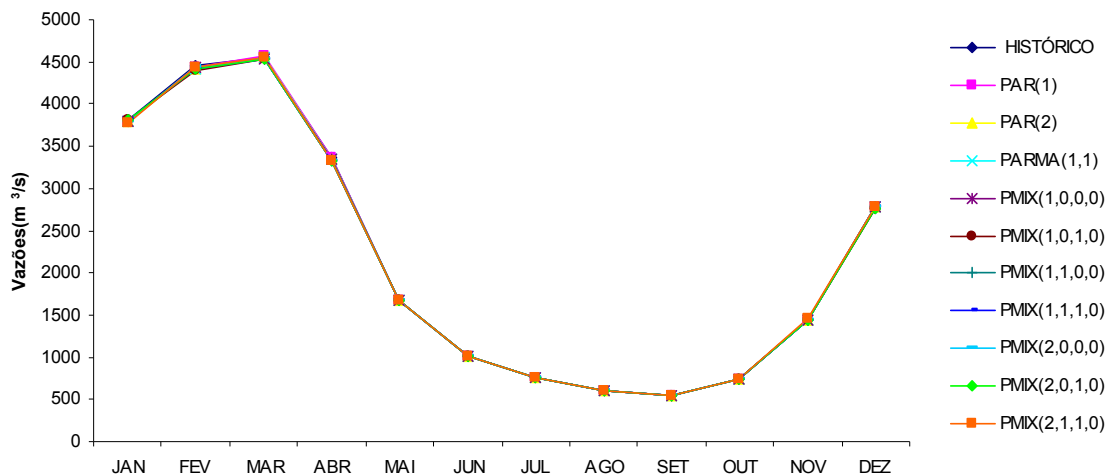


Figura 1 - Vazões mensais médias - Séries histórica e sintéticas - Estação Porto Nacional

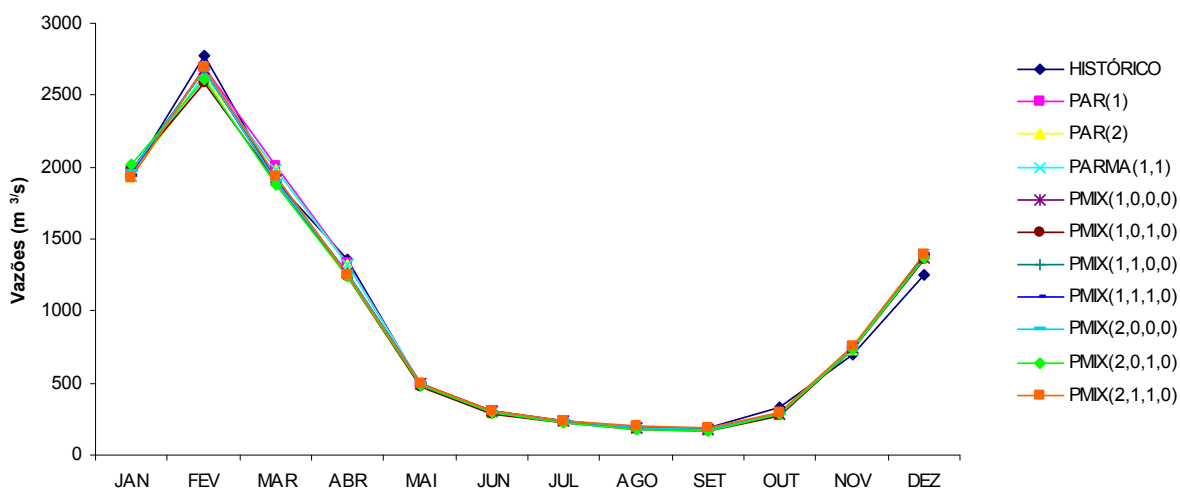


Figura 2 – Desvios padrão mensais médios - Séries histórica e sintéticas - Estação Porto Nacional



Figura 3 – Autocorrelações mensais “Lag1” médias - Séries histórica e sintéticas - Estação Porto Nacional

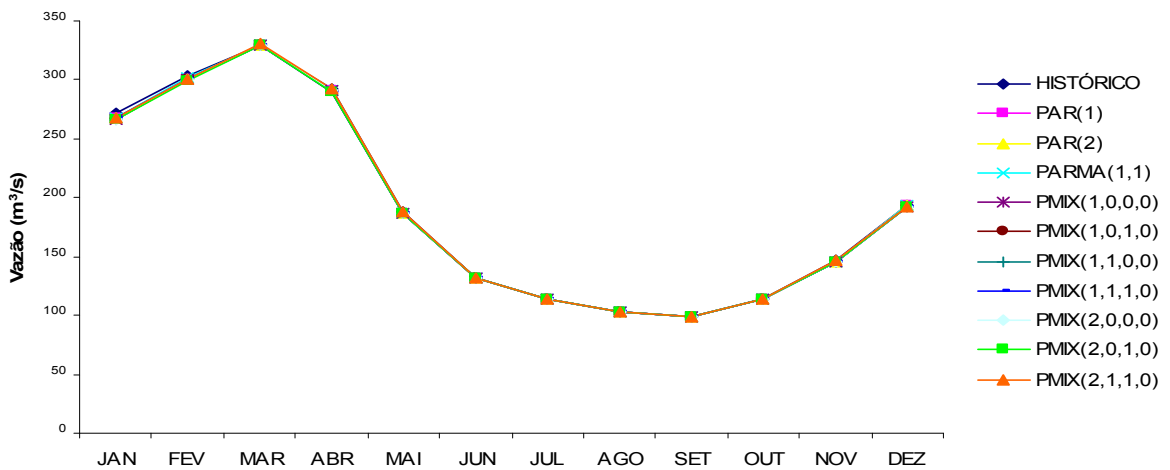


Figura 4 - Vazões mensais médias - Séries histórica e sintéticas - Estação São Félix de Balsas

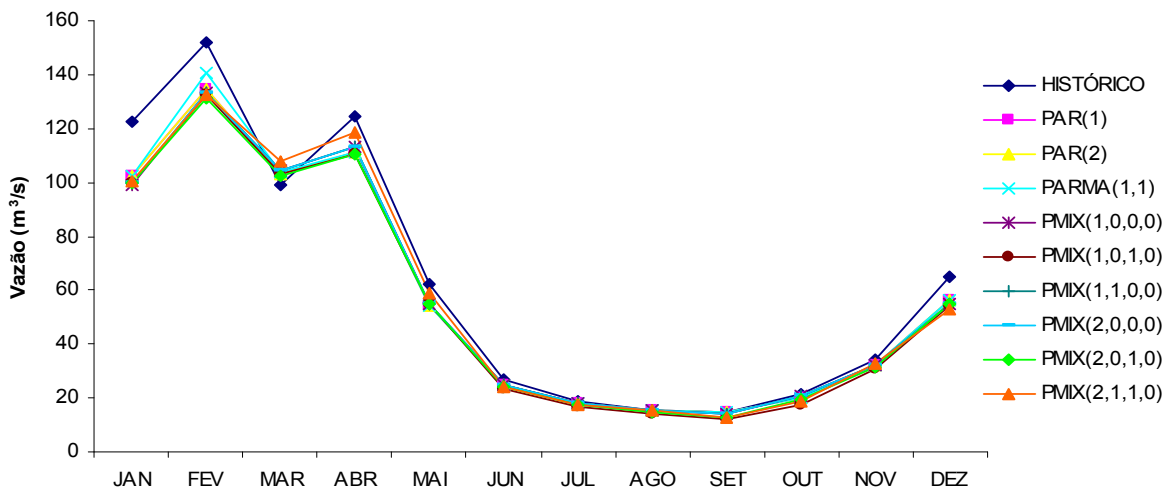


Figura 5 – Desvios padrão mensais médios - Séries histórica e sintéticas - Estação São Félix de Balsas

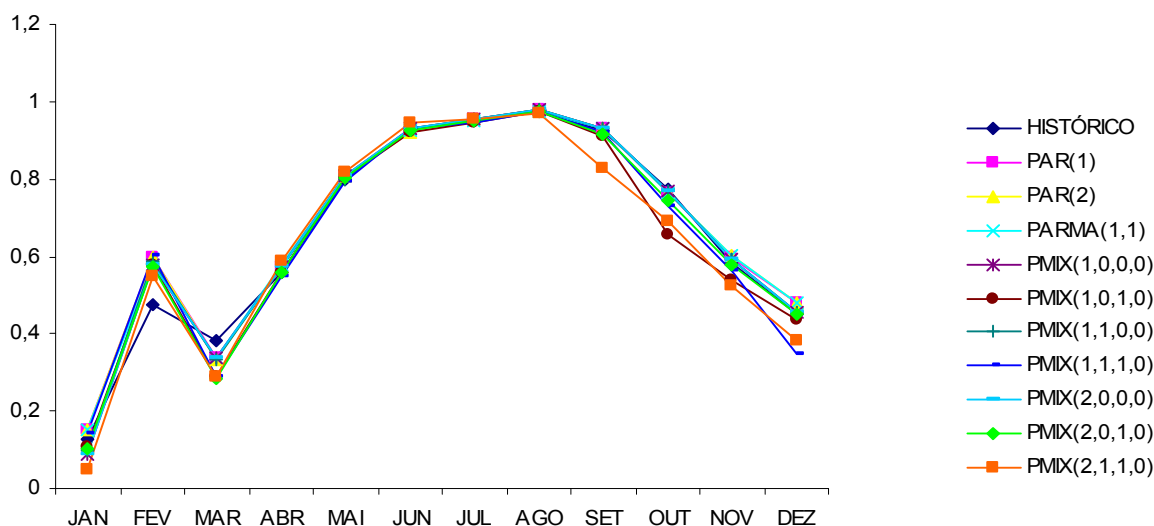


Figura 6 - Autocorrelações mensais “Lag1” médias - Séries histórica e sintéticas - Estação São Félix de Balsas

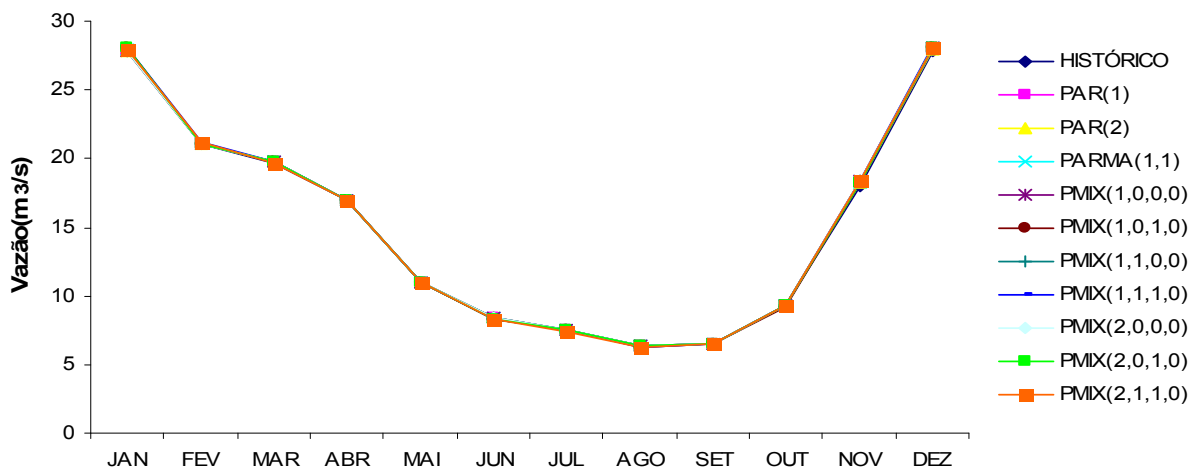


Figura 7 - Vazões mensais médias - Séries histórica e sintéticas - Estação Castelo

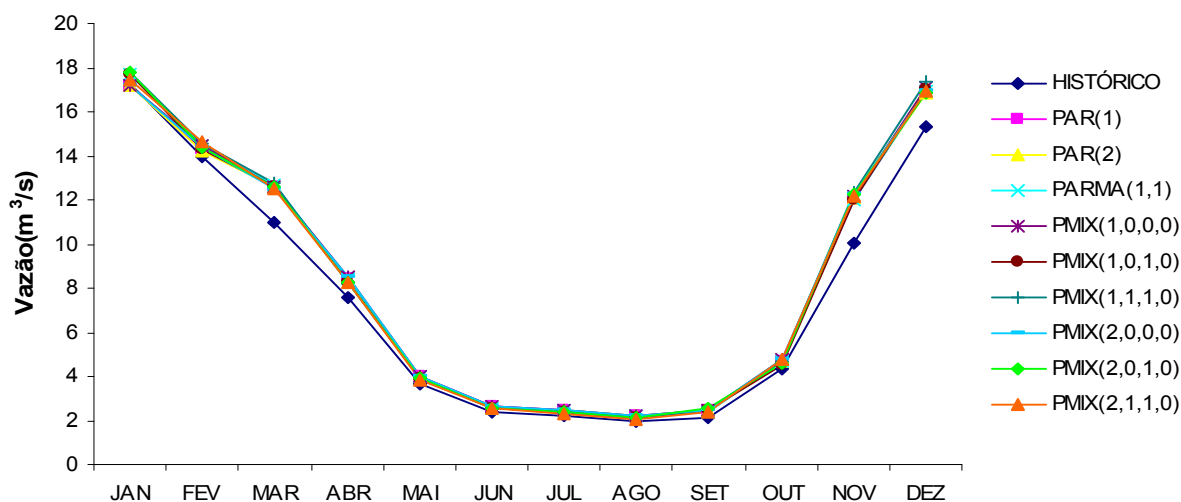


Figura 8 - Desvios padrão mensais médios - Séries histórica e sintéticas - Estação Castelo



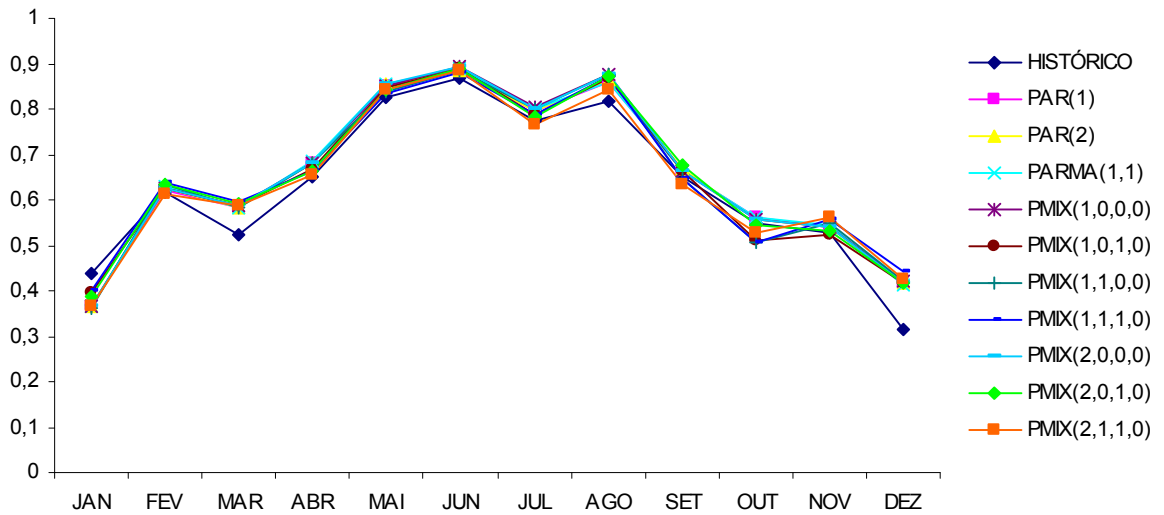


Figura 9 - Autocorrelações mensais “Lag1” médias - Séries histórica e sintéticas - Estação Castelo

As Figuras 1 a 9 mostram bons desempenhos na preservação de vazões, desvios padrão e autocorrelações mensais médias para todos os modelos estocásticos periódicos utilizados.

As Figuras 10 a 12 apresentam gráficos comparativos das autocorrelações anuais, lags 1 a 4, para a série histórica e para as séries sintéticas geradas com o uso dos diferentes modelos ajustados.

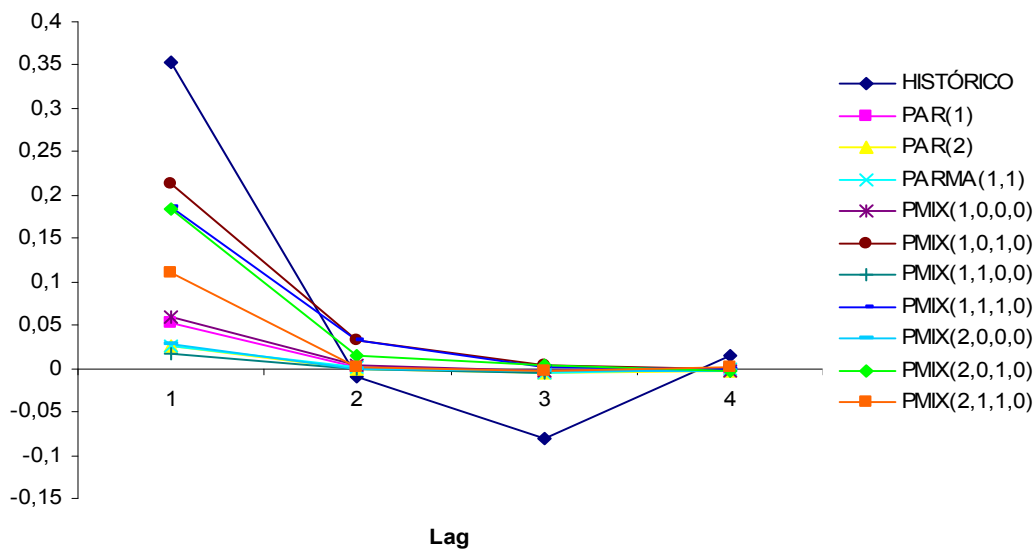


Figura 10 - Autocorrelações anuais da Estação Porto Nacional

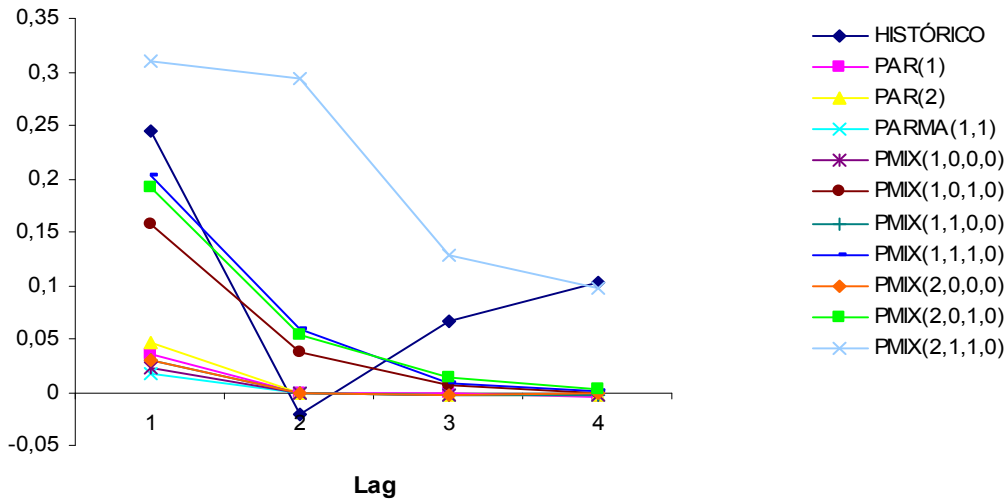


Figura 11 - Autocorrelações anuais da Estação São Félix de Balsas

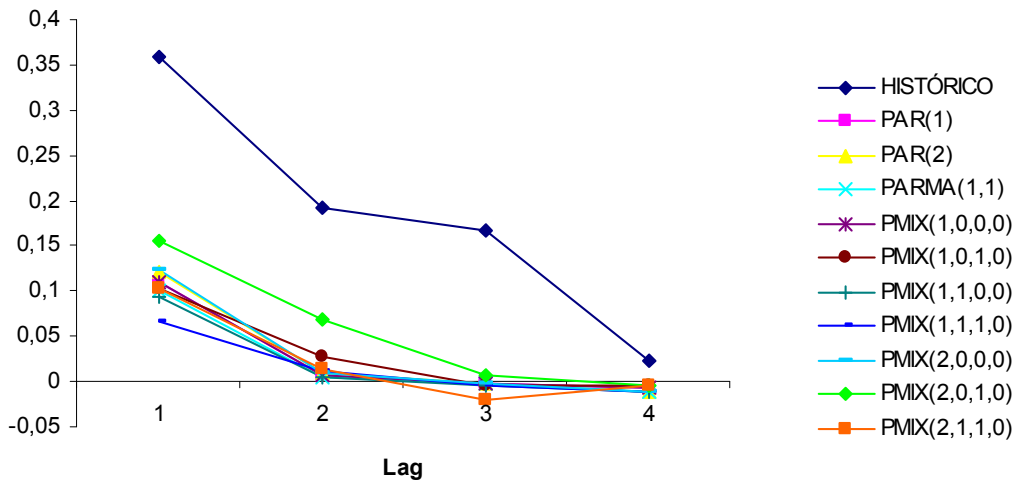


Figura 12 - Autocorrelações anuais da Estação Castelo

Para todas as três estações fluviométricas consideradas, os modelos que apresentaram valores mais próximos dos históricos foram os PMIX(1,0,1,0), para Porto Nacional, PMIX(1,1,1,0), para São Félix de Balsas e PMIX(2,0,1,0) para Castelo.

## 5. CONCLUSÕES

Todos os modelos considerados preservaram adequadamente as médias das vazões, desvios padrão e autocorrelações “lag1” mensais das séries históricas. Modelos apresentando parâmetros  $\Phi$  foram os que apresentaram valores de autocorrelações anuais sintéticas mais próximas das históricas.

Pelo critério Bayesian (BIC), que considera a quantidade de parâmetros, o modelo PMIX(1,0,0,0) foi considerado o mais parcimonioso, para todas as três séries históricas. Contudo, considerando a importância de melhor preservação de dependência de longo termo das séries históricas, modelos com parâmetros  $\Phi$  apresentaram melhores performances.

Cabe observar que o critério Bayesian (BIC) para seleção de modelos leva em consideração não somente a qualidade do ajuste, mas também penalizam a inclusão de parâmetros adicionais. Assim, um modelo com mais parâmetros pode apresentar melhor ajuste, mas não necessariamente ser preferível em termos do critério de informação. Os modelos apresentando valores de autocorrelações anuais mais próximas das históricas, para as estações Porto Nacional, São Félix de Balsas e Castelo, foram os modelos PMIX(1,0,1,0), PMIX(1,1,1,0) e PMIX(2,0,1,0) respectivamente.

Os resultados obtidos para as três séries históricas consideradas indicam que modelos PARMA multiplicativos, que apresentam parâmetros  $\Phi$  são capazes de melhor preservar autocorrelações anuais, de longo termo e, conseqüentemente, de gerar séries sintéticas apresentando períodos mais longos de secas, conduzindo a determinações mais precisas de volumes de reservatórios necessários para regularização de vazões.

Tendo em vista que modelos apresentando parâmetros  $\Phi$  são capazes de melhor reproduzir autocorrelações anuais de longo prazo presentes em séries históricas, propriedade importante para dimensionamento de reservatórios de regularização, é recomendável o desenvolvimento de pesquisas no sentido de redução das quantidades de parâmetros destes modelos, com o objetivo de parcimônia.

## BIBLIOGRAFIA

AKAIKE, H. (1974). *A new look at the statistical model identification*, IEEE Transactions on automatic, v. 19, p. 716-723.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2<sup>nd</sup> edn. San Francisco, CA: Holden-Day.

CLARKE, R. T. (1973). “*Mathematical models in hydrology*”. Irrigation and Drainage Paper 19, FAO, United Nations, Rome.

EHLERDS, R. S. (2003). *Análise de séries temporais*. Apostila do curso de Estatística oferecido pelo Departamento de Estatística da UFPR, Curitiba. 53f.

HARUN, S. (1999). *Forecasting and Simulation of Net Inflows for Reservoir Operation and Management*. Unpublished Ph.D. Dissertation, UTM.

ISMAIL, N.A. (2005). *Aggregation simulation model of flow and rainfall series*. 250 p. Dissertação de Mestrado- Faculty of Civil Engineering. Universiti Teknologi Malaysia.

- KOUTSOYIANNIS, D.; LANGOUSIS, A. (2006). “*A stochastic methodology for generation of seasonal time series reproducing overyear scaling behaviour*”, *Journal of Hydrology*, v.322, p.138-154.
- LOVATTE, A. P. (2003). *Modelagem estocástica de vazões sazonais*. 192 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Mestrado em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo.
- LUND, R., BASAWA, I. (2000). “*Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models*”. *J. Tim Ser. Anal.* 21, p 75-93.
- MAGALHÃES, M. H. (2004). *Redes Neurais, metodologias de agrupamento e combinação de previsões aplicados à previsão de vazões naturais*. 107p. Universidade Estadual de Campinas.
- MAINDMENT, D. R. (1993). *Handbook of Hydrology: Analysis and modeling of hydrologic time series*, United States of America: McGraw-Hill.
- MCLEOD, A. I. (1994). “*Diagnostic checking of periodic autoregression models with application*”. *Journal of Time Series Analysis* v.15, 221-233.
- MENDONÇA, A. S. F.(1987). *Stochastic model for seasonal and monthly streamflow*. 237p. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Colorado State University, Ft. Collins, 1987.
- MOURA, K.L. (2005). *Modelagem Estocástica de Vazões mensais para Bacias Hidrográficas Brasileiras*. 175 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Mestrado em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo.
- MURTEIRA, B. J. F. et al. (1993). *Análise de sucessões cronológicas*, Lisboa: McGraw-Hill.
- OOMS, M.; FRANCES, P. H. (2001). “*A seasonal periodic long memory model for monthly river flows*”. *Environmental Modelling & Software*, p. 559-569.
- RIGHETTO, A. M. (1998). *Hidrologia e Recursos hídricos*, São Carlos: EESCC-USP, p. 359-495.
- SÁFADI, T. (2004). *Uso de séries temporais na análise de vazão de água na represa de Furnas*. *Ciência e Agrotecnologia*, Lavras, v.28, n.1, p.142-148.
- SALAS, J.D. et al. (1980). *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*. Water Resourcer Publications, Littleton.
- SALAS, J.D. (1993). “*Analysis and Modeling of Hydrologic Time Series*”. In: Maidment, D., (Ed.). *Handbook of Hydrology*. McGraw Hill, New York.
- SALAS, J.D.; LANE, W. L.; FREVERT, D. K. (2002). “*Stochastic analysis, modeling and simulation (SAMS 2000)*”. In: SINGH, V. P.; FREVERT, D. *Mathematical models of small watershed hydrology and applications*. ed. Colorado: Water Resources Publications, 2002. p. 749-832.
- SCHWARTZ, G. (1978). *Estimating the dimensions of a model*. *Annals of Statistics* 6, 461-464.
- SILVA, G. A.; MAITELLI, A. L.; ARAÚJO, A. D. (1998). *Um Ambiente para projeto de controladores clássicos empregando técnicas de otimização*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 12, 1998, Uberlândia. Anais...Uberlândia: Sociedade Brasileira de Automática, v. 6, p. 1911-1916.
- VECCHIA, A. V.(1985). “*Periodic autoregressive moving average (PARMA) modeling with applications to water resources*”. *Water Res. Bull.* 21.
- WASIMI, S.A., MONDAL, M.S. (2006). “*Generating and forecasting monthly flows of the Ganges river with PAR model*”, *Journal of Hydrology*, v.323, p.41-56.