

# MÉTODOS NUMÉRICOS LAGRANGEANOS: Estudos de caso aplicados a problemas de Engenharia Hidráulica e de Recursos Hídricos

*Joel Roberto Guimarães Vasco<sup>1</sup>; Geraldo de Freitas Maciel<sup>2</sup>; Carlos Roberto Minussi<sup>3</sup> & Jean-Paul Vila<sup>4</sup>*

**RESUMO** --- Este artigo trata de uma categoria de métodos numéricos relativamente recente, muito difundida no exterior, mas pouco explorada no cenário nacional. Os métodos numéricos lagrangeanos desvencilham-se do paradigma de discretização do domínio físico, uma vez que são métodos essencialmente sem malha (*meshless*), pois trabalham com a noção de partícula. O método numérico lagrangeano utilizado neste trabalho é conhecido como SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*). Esta comunicação apresenta, brevemente, a filosofia e o equacionamento do método, sendo, posteriormente, analisadas algumas de suas potencialidades através de aplicações com fins de Engenharia. Os resultados da análise numérica são confrontados com resultados teóricos, evidenciando a aplicabilidade do SPH.

**ABSTRACT** --- This paper deals with a new kind of numerical method, widely applied internationally, but hardly ever used to solve engineering problems in Brazil. Lagrangean numerical methods are meshless, because they take into account moving interpolation points, also known as particles. In this paper, it has been used the lagrangean numerical method Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). The idea and equations of the SPH have been briefly shown and its accuracy in order to solve engineering problems has been analyzed. The results of numerical simulations were compared with the analytical ones, to assure the applicability of SPH.

**Palavras-chave:** métodos numéricos, métodos lagrangeanos, SPH.

---

1) Mestre em Engenharia Civil pela FEIS/UNESP, PPGE, Alameda Bahia, 550, 15385-000, Ilha Solteira. E-mail [joel@dec.feis.unesp.br](mailto:joel@dec.feis.unesp.br)

2) Professor Adjunto da FEIS-UNESP, PPGE, Alameda Bahia, 550, 15385-000, Ilha Solteira. E-mail [maciel@dec.feis.unesp.br](mailto:maciel@dec.feis.unesp.br)

3) Professor Titular da FEIS-UNESP, PPGE, Av. Brasil Norte, 364, 15385-000, Ilha Solteira. E-mail [minussi@dec.feis.unesp.br](mailto:minussi@dec.feis.unesp.br)

5) Professor Titular do INSA de Toulouse, Universidade de Toulouse, França. E-mail [vila@insa-toulouse.fr](mailto:vila@insa-toulouse.fr)

# 1 INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Problemas não-lineares com ou sem presença de choques e/ou acidentes de geometria (mudança brusca de declividades, por exemplo) são comuns em Engenharia. Seja a previsão do comportamento de uma ruptura de barragem, seja a investigação da quebra de uma onda, seja a perturbação causada pelo impacto localizado de uma massa sólida em um lago de águas tranquilas, sempre há a preocupação na previsão e posterior controle de tais fenômenos. Previsão essa desejada não apenas pelo caráter técnico-científico, mas também pelo risco potencial para acidentes (danos a estruturas civis) e conseqüências para a população atingida.

Pelas propriedades matemáticas desses problemas, lança-se mão de artifícios numéricos para sua solução, uma vez que uma abordagem estritamente analítica fica impossibilitada muitas vezes pela própria topologia envolvida. No entanto, as técnicas numéricas tradicionais, baseadas, por exemplo, na formulação Euleriana, necessitariam da discretização espacial do domínio estudado. Por métodos tradicionais chamam-se, aqui, os métodos numéricos que necessitam da discretização do domínio.

Frente à limitação de representação de domínios de geometrias complexas e/ou descontinuidades, aplicam-se algumas técnicas, como a reestruturação de malha ou malhas adaptativas. Dessa forma, é possível tratar as descontinuidades do domínio, que de forma geral e em contrapartida, aumentam consideravelmente o tempo de processamento além de atrelar a confiabilidade da solução obtida ao algoritmo de reestruturação de malha.

Dessa forma, métodos numéricos desvinculados do paradigma de discretização do domínio vêm, com o passar dos anos, sendo aplicados a vários tipos de problemas com sucesso. Pode-se dizer, de uma maneira geral, que esses métodos baseados na formulação Lagrangeana são chamados de Métodos de Partículas. Nos Métodos de Partículas, não é necessária a discretização do domínio a ser simulado (*meshfree*). O domínio é representado por um conjunto de partículas, cuja dinâmica é determinada de acordo com as equações de balanço (conservação da massa e quantidade de movimento), escritas na forma Lagrangeana. Existem vários métodos criados a partir dessa filosofia, e pode-se destacar o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) e o MPS (*Moving Particle Semi-implicit Method*).

Essa comunicação científica tem como objetivo aplicar o SPH a alguns problemas de Engenharia, com enfoques especiais a problemas não-lineares e/ou descontínuos. O comportamento geral do SPH é avaliado através de comparações dos resultados numéricos com soluções teóricas (quando disponíveis). Faz-se também uma breve revisão dos fundamentos do SPH e também seu equacionamento.

## 2 O MÉTODO SPH

O método SPH foi concebido inicialmente para resolver problemas astrofísicos no espaço tridimensional (Lucy, 1977; Gingold e Monaghan, 1977). No entanto, a simplicidade com que fenômenos complexos são modelados faz do SPH uma ferramenta de solução interessante, tendo sido estudada extensivamente e estendida para diversos problemas e áreas de atuação (Vila, 1998).

Do ponto de vista computacional, representa-se o fluido por uma porção de partículas. Essas partículas representam pontos de interpolação onde determinadas grandezas (velocidade, posição, massa específica, etc.) são conhecidas. A principal diferença dos Métodos de Partículas para os métodos tradicionais é que os pontos de interpolação (partículas) são livres para se deslocar, sendo esse deslocamento definido pelas equações de balanço (continuidade e quantidade de movimento).

Sendo assim, como representar as funções contínuas (velocidade, massa específica, etc.) em termos de partículas? Utiliza-se, para esse fim, a representação de um campo variável qualquer (escalar, vetorial ou tensorial)  $f$  em termos de uma convolução:

$$f(\vec{r}) = \int f(\vec{r}_j) \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) d\vec{r}_j \quad (1)$$

onde  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$  é a função impulso ou delta de Dirac. Pode-se, admitindo certo nível de aproximação, substituir a função delta de Dirac por uma função  $W$ , que satisfaça as seguintes condições:

$$\int W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) d\vec{r}_j = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (3)$$

Adotando as aproximações sugeridas pela equação 2 e substituindo na equação 1, resulta:

$$f(\vec{r}) \approx \int f(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) d\vec{r}_j \quad (4)$$

onde o parâmetro  $h$  é o comprimento de suavização (*smoothing length*) da função  $W$ , que é chamada de kernel ou núcleo de suavização (*smoothing kernel*). O núcleo de suavização, no SPH, tem a responsabilidade de interpolar uma grandeza qualquer entre partículas. Mais adiante, serão mostradas as principais funções utilizadas como núcleo de suavização.

Substituindo a parte contínua da equação 4 pela somatória em todas as partículas do domínio, tem-se:

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \sum_j f_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \quad (5)$$

onde  $m_j$  representa a massa da partícula  $j$  e  $\rho_j$  representa a massa específica da partícula  $j$ . O valor da função  $f$  em  $\vec{r}_j$  é denotado por  $f_j$ . De modo a facilitar a notação, utiliza-se,  $W_{ij} = W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h)$  e,

da mesma forma,  $f_{ij} = f_i - f_j$  e  $\bar{f}_{ij} = (f_i + f_j)/2$ .

De acordo com a equação 5, pode-se representar qualquer campo variável em termos da formulação particulada. Sendo assim, para que as partículas simulem o comportamento do fluido desejado, basta escrever as equações de balanço (conservação da massa e quantidade de movimento), na forma Lagrangeana. Uma vez obtidas essas equações, pode-se proceder a resolução do sistema.

### 3.1 Núcleo de suavização $W$

O núcleo de suavização  $W$  deve satisfazer as restrições impostas pelas equações 2 e 3. Existem, portanto, várias escolhas, sendo a regularização gaussiana (para o problema bidimensional, equação 6) a primeira categoria de núcleo aplicada (Gingold e Monaghan, 1977).

$$W_G\left(\frac{|\vec{r}|}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{|\vec{r}|}{h}\right)^2\right) \quad (6)$$

onde o índice G em  $W_G$  representa o núcleo gaussiano. Para facilitar a notação, comumente, faz-se  $s = |\vec{r}|/h$ .

Existem vantagens na adoção do núcleo gaussiano, sendo uma delas obtida pelo comportamento da função exponencial, no sentido que derivadas do núcleo pode ser escrita em função do próprio núcleo. No entanto, a falta de suporte compacto faz com que todas as partículas do domínio influenciem umas as outras, mesmo que as contribuições sejam pequenas (para partículas afastadas).

Um outro tipo de núcleo bastante utilizado são as funções *splines*, sendo a cúbica dada pela equação 7:

$$W_C(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{s^3}{2}, & \text{se } 0 < s \leq 1 \\ \frac{(2-s)^3}{6}, & \text{se } 1 < s \leq 2 \\ 0, & \text{se } s > 2 \end{cases} \quad (7)$$

Uma das maiores vantagens na utilização do núcleo regido pela *spline* cúbica é que a função é exatamente nula para  $s > 2$ , ou seja, para uma distância superior a  $2h$ . Essa propriedade é o suporte compacto, que reduz drasticamente o tempo computacional, já que a contribuição das partículas é limitada a um raio  $2h$ .

Utiliza-se, nesse trabalho, o núcleo do tipo *splines*, regido pela equação 7. O ganho computacional resultante do suporte compacto do núcleo vem ao custo de estabelecer a vizinhança da partícula considerada. Como apenas partículas próximas influenciam umas as outras, é preciso

tratar e identificar essas partículas. Ainda sob a ótica de otimização computacional, não há ganho significativo em usar o núcleo regido por *splines* se é necessário varrer todas as partículas para verificar se a distância até a partícula considerada é menor que  $2h$ . Para contornar esse inconveniente, Morris (1996) apresenta um algoritmo de busca de vizinhos, baseado na subdivisão do domínio em células quadradas, de lado  $2h$ . Conhecendo-se, de antemão, quais partículas pertencem a cada célula (através de uma lista de ligação), é possível restringir a pesquisa das partículas vizinhas apenas às células adjacentes. Esse artifício foi utilizado nesse trabalho.

A Figura 1 ilustra os núcleos gaussiano e *spline* cúbico.

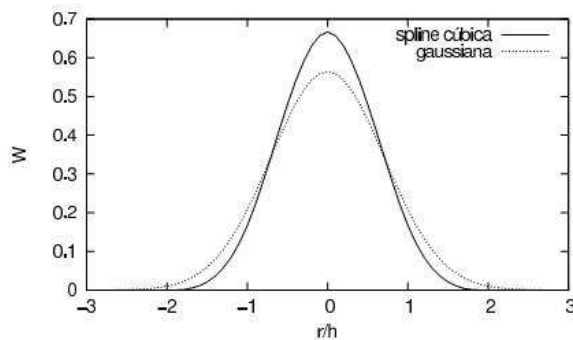


Figura 1 – Núcleo de suavização dos tipos *spline* cúbica e gaussiano

### 3.2 Equação da quantidade de movimento

Como o escopo desse trabalho restringe-se aos escoamentos de fluidos ideais, tem-se a seguinte equação para quantidade de movimento:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\frac{(\vec{\nabla}p)_i}{\rho_i} \quad (8)$$

que nada mais é do que a equação de Euler sem a força de corpo (campo gravitacional), onde  $\vec{\nabla}$  é o operador vetorial nabla. Para escrever a equação 8 em termos de partículas, deve-se representar o gradiente de um escalar na formulação SPH, que injetado na equação de quantidade de movimento resulta:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (9)$$

A expressão 9 conserva a quantidade de movimento linear e angular exatamente. Essa propriedade foi obtida a partir de uma manipulação algébrica do gradiente. Existem outras maneiras de reescrever o gradiente que conservam a quantidade de movimento exatamente (Morris, 1996; Lachamp, 2003).

### 3.3 Deslocamento das partículas

As partículas são deslocadas de acordo com:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i \quad (10)$$

Existem métodos que melhoram a estabilidade da equação 10. Um desses métodos é o XSPH, que adiciona o seguinte termo à equação 10:

$$\Delta\vec{u}_i = \varepsilon \sum_j m_j \frac{\vec{u}_{ij}}{\rho_{ij}} W_{ij} \quad (11)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante que varia entre 0 e 1. Segundo Monaghan e Kos (1999), essa correção mantém as partículas mais ordenadas, além de prevenir penetração em casos de escoamentos de alta velocidade. Lachamp (2003) ressalta que o termo corretor sugerido (equação 11) não introduz dissipação viscosa suplementar, aumentando ligeiramente, todavia, a dispersão do sistema.

### 3.4 Equação da continuidade

A equação da continuidade (equação 12):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i \quad (12)$$

escrita em termos de partículas, reduz-se basicamente ao tratamento do divergente da velocidade. O divergente, em termos da formulação SPH, aplicado diretamente à equação da continuidade (equação 12), resulta:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (13)$$

A equação 13 conserva exatamente a massa total, uma vez que o número de partículas e massa de cada partícula são constantes ao longo da simulação. Mas, principalmente em problemas com superfície livre, nota-se um decaimento acentuado na massa específica nas proximidades da superfície livre, retratando comportamentos indesejáveis nessa região. Para contornar esses inconvenientes, opta-se por um rearranjo na formulação do divergente (Monaghan, 1992), obtendo uma nova formulação para a equação 12, como segue:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \vec{u}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (14)$$

Com a equação 14, o problema de queda repentina na massa específica é contornado, pois a massa específica pode ser atribuída a cada partícula, e a variação  $d\rho/dt$  só ocorrerá se houver aproximação ou afastamento das partículas. Podem-se aplicar correções e/ou suavizações à massa específica de tempos em tempos na simulação, para contornar o fato da equação 14 não conservar a massa total de forma exata. Nesse trabalho, faz-se uma medianização da massa específica a cada 20

intervalos de tempo (Laigle et al., 2007).

### 3.5 Leis de estado para a pressão

A modelagem da pressão é um ponto delicado da técnica SPH aplicada a fluidos incompressíveis, devido à falta de controle explícito da massa específica local. Como o SPH converge bem para fluidos compressíveis, aproxima-se o caso incompressível por um fluido pseudo-compressível através de uma equação de estado para a pressão. Essa equação de estado é da forma  $p = p(\rho)$  e, além de fechar o sistema de equações a ser resolvido, mantém a característica essencialmente explícita do SPH. Cabe lembrar que a aproximação para o caso incompressível está intimamente ligada à escolha da celeridade do som da simulação. Isso porque, em escoamentos com baixo número de Mach ( $M$ ), as variações de massa específica são proporcionais a  $M^2$ . Então, restringindo-se as velocidades no fluido para que  $M$  seja da ordem de  $O(10^{-1})$ , garante-se que as variações de massa específica sejam na ordem de 1%. Normalmente, a celeridade do som utilizada na simulação segue esse procedimento, isso porque a utilização do valor físico da celeridade do som implicaria em um tempo de processamento muito maior, sem, no entanto, qualquer ganho de precisão significativo.

Existem diversas propostas para a equação de estado. Uma delas é a equação 15, utilizada neste trabalho e conhecida como equação de Batchelor (*apud* Lachamp, 2003), que nada mais é do que uma equação de Tait, que relaciona pressão e massa específica:

$$p_i = \frac{c^2 \rho_0}{7} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^7 - 1 \right] \quad (15)$$

sendo  $\rho_0$  uma massa específica inicial ou de referência.

### 3.6 Viscosidade artificial

Observa-se, em problemas de escoamento regidos pela equação de Euler, oscilações que não correspondem à física. Essas oscilações geralmente são fruto de uma difusão numérica de pequena ordem. Assim como em outros métodos, adiciona-se à equação de quantidade de movimento um termo para anular essas oscilações, correspondendo à conhecida viscosidade numérica. No SPH, vários termos de correção já foram propostos, mas aquele que é mais largamente utilizado é apresentado na equação 16:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}}, & \text{se } \bar{u}_{ij} \cdot \bar{r}_{ij} < 0 \\ 0, & \text{se } \bar{u}_{ij} \cdot \bar{r}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

com:

$$\mu_{ij} = \frac{h\vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\vec{r}_{ij}^2 + 0,01h^2} \quad (17)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

Introduzindo o termo  $\Pi_{ij}$  (equação 16) na equação de quantidade de movimento (equação 9), resulta:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (18)$$

Pode-se perceber, pela equação 18, o motivo da denominação de pressão viscosa ou pressão artificial para o termo  $\Pi_{ij}$ .

### 3.7 Condições de contorno

Originalmente, o SPH foi concebido para tratar de problemas no domínio astrofísico, portanto em problemas cuja condição de fronteira é dita fronteira aberta. No SPH ou em qualquer método Lagrangeano sem malha, não há necessidade de estabelecer certas condições de contorno. Por exemplo, não é necessário estabelecer a condição dinâmica ou cinemática na superfície livre. Essas condições estão, de certa forma, incorporadas à formulação do método (Oger et al., 2007).

Entretanto, na grande maioria dos problemas em Engenharia, lida-se com condições de contorno mais restritivas (impermeabilidade de paredes, condição de aderência, etc). Tais condições de contorno não são satisfeitas automaticamente pelas equações do método. Dessa forma, o tratamento das fronteiras recebe atenção especial e seguem basicamente duas vertentes: a adoção das partículas fantasmas (*ghost particles*) ou fronteiras reativas (*boundary forces*).

Neste trabalho, as fronteiras são modeladas como reativas, sendo seu equacionamento mostrado na seqüência.

#### 3.7.1 Fronteiras reativas

As fronteiras reativas utilizam o conceito de atração e repulsão molecular (Monaghan e Kos, 1999). Dessa forma, a fronteira é representada por uma linha de partículas reais que exercem uma força normal a qualquer partícula que entrar em seu raio de vizinhança. Embora ainda não se saiba a força ótima exercida pela fronteira, algumas aproximações dão bons resultados. Monaghan e Kos (1999) e Monaghan *et al.* (2003), por exemplo, descrevem a força exercida pela parede ( $f_p$ ) como sendo:

$$f_p = R(\zeta)P(\xi)\vec{n} \quad (19)$$



onde  $R(\zeta)$  é dado por (Monaghan *et al.*, 2003):

$$R(\zeta) = \begin{cases} \frac{2}{3}\beta_1, & \text{se } 0 < \zeta/h < 2/3 \\ \beta_1 \left( 2\frac{\zeta}{h} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta}{h}\right)^2 \right), & \text{se } 2/3 < \zeta/h < 1 \\ \frac{1}{2}\beta_1 \left( 2 - \frac{\zeta}{h} \right)^2, & \text{se } 1 < \zeta/h < 2 \\ 0, & \text{se } \zeta/h \geq 2 \end{cases} \quad (20)$$

e  $\zeta$  é a distância normal à fronteira,  $\beta_1 = 0,02c^2/\zeta$ . A contribuição  $P(\xi)$  é expressa pela equação 21:

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi\xi}{\Delta p_f}\right) \right), & \text{se } \xi < \Delta p_f \\ 0, & \text{se } \xi \geq \Delta p_f \end{cases} \quad (21)$$

onde  $\xi$  é a distância tangente à fronteira e  $\Delta p_f$  é o espaçamento entre partículas na fronteira.

### 3.8 Passo de tempo

Como se trata de um método puramente explícito, cuidados devem ser tomados na escolha do passo de tempo  $\Delta t$  para garantir a boa convergência do SPH. Como em outros métodos explícitos, recorre-se à restrição CFL (condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy), que impõe limites as velocidade e/ou aceleração das partículas. Utiliza-se a seguinte formulação:

$$\Delta t = \min(\Delta t_p, \Delta t_{va}, \Delta t_f) \quad (22)$$

com:

$$\Delta t_{va} = \min_i CFL \frac{h_i}{c_i + 0,6(\alpha c_i + \beta \mu_{ij})} \quad (23)$$

$$\Delta t_p = \min_i \frac{\zeta}{0,10c_i} \quad (24)$$

$$\Delta t_f = \min_i CFL \sqrt{\frac{h_i}{f_i}} \quad (25)$$

onde  $f_i$  representa a força por unidade de massa atuante na partícula  $i$ , e CFL varia no intervalo fechado [0;1].

### 3.9 Evolução temporal

Considerando, inicialmente, que o sistema de equações do SPH pode ser escrito na forma:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U} \quad (26)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \quad (27)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = R \quad (28)$$

Para solucionar esse sistema de equações explícitas, pode ser aplicado qualquer método de integração de equações diferenciais de primeira ordem, como o *Leap-Frog* ou Preditor-Corretor, desde que a máxima ordem do erro do método seja  $O(\Delta h^2)$ , onde  $\Delta h$  é o incremento do método. A limitação com relação à ordem do erro se dá, principalmente, pelo erro intrínseco do SPH, que é da ordem  $O(h^2)$ . Portanto não há razão para utilizar métodos de integração de ordem superior a  $O(\Delta h^2)$  (como um Runge-Kutta de 4ª ordem, por exemplo).

Utiliza-se, nesse trabalho, o método Preditor-Corretor (ou Euler Melhorado), para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (equações 26, 27 e 28).

#### 4 APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE ENGENHARIA

De modo a verificar a aplicabilidade do método apresentado, recorre-se a problemas clássicos da Engenharia, com enfoque a problemas não-lineares e/ou descontínuos. Foram escolhidos como estudos de caso dois problemas: o esvaziamento de um reservatório e a quebra de uma onda.

O problema do esvaziamento de um reservatório possui solução teórica simples e pode ser resolvido utilizando métodos tradicionais (método dos volumes finitos com um algoritmo de localização da superfície livre, por exemplo), por apresentar uma variação suave da superfície livre. No entanto, com a aplicação do SPH ao problema, serão observados tanto o jato livre formado e o escoamento caótico gerado pelo jato.

Já o segundo estudo de caso tem como objetivo mostrar uma grande perturbação na superfície livre, traduzida pela quebra de uma onda. Nesse teste os métodos tradicionais enfrentam grandes dificuldades, mesmo com algoritmos de reestruturação de malha, pois estes não conseguem representar naturalmente a incorporação de ar ao fluido escoante.

##### 4.1 Esvaziamento de um reservatório

A solução teórica do problema do esvaziamento de um reservatório pode ser expressa em termos da equação 29:

$$t_{i+1} - t_i = 2 \frac{A_r}{C_d A_o \sqrt{2g}} (H_i^{1/2} - H_{i+1}^{1/2}) \quad (29)$$

onde  $C_d$  é o coeficiente de descarga do orifício,  $A_r$  é a área do reservatório (considerada constante),  $A_o$  é a área do orifício,  $H$  é a altura da lâmina d'água no reservatório e  $t$  é o tempo.

As dimensões do reservatório e orifício, assim como a disposição geral das partículas para simulação em SPH podem ser vistas na figura 2.

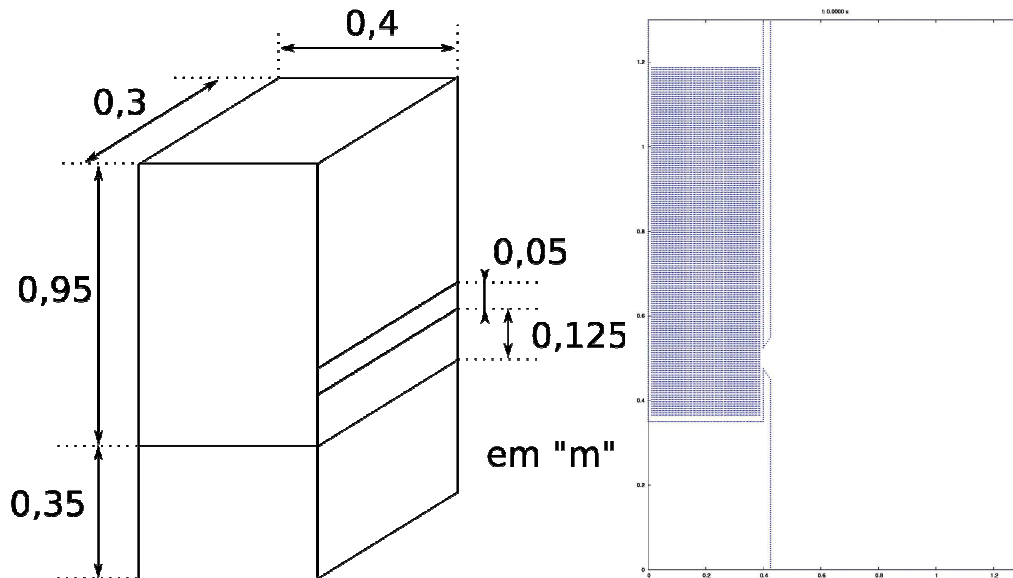


Figura 2 – À esquerda, são apresentadas as características geométricas do reservatório e orifício simulados. À direita, percebe-se a disposição inicial das partículas para um nível de aproximadamente 1,2m no reservatório

Para aplicação da equação 29 resta a definição do coeficiente de descarga. Foi obtido um coeficiente de contração de 0,4 (relação entre a área do jato e área do orifício), com auxílio das imagens geradas na simulação. Já o coeficiente de velocidade foi estimado em 0,77, que resultou em um coeficiente de descarga próximo de 0,3.

A comparação da depleção no reservatório com a simulação SPH com os resultados teóricos, é mostrada na figura 3. Algumas imagens em tempos diferentes são dispostas na figura 4, de modo que podem ser observados tanto a formação do jato livre quanto o escoamento caótico a sua jusante.

A diferença inicial observada no resultado numérico apresentado na figura 3 deve-se a maneira como a fronteira é modelada. Como as fronteiras reativas respondem à aproximação de uma partícula com uma força inversamente proporcional à distância normal entre a partícula e a fronteira, existe uma distância ótima para haver o equilíbrio do sistema. Essa distância ótima depende da profundidade local e da distribuição inicial das partículas. Como a distância inicial utilizada é diferente da ótima, o método SPH leva um tempo até que a superfície livre não mais apresente oscilações significativas.

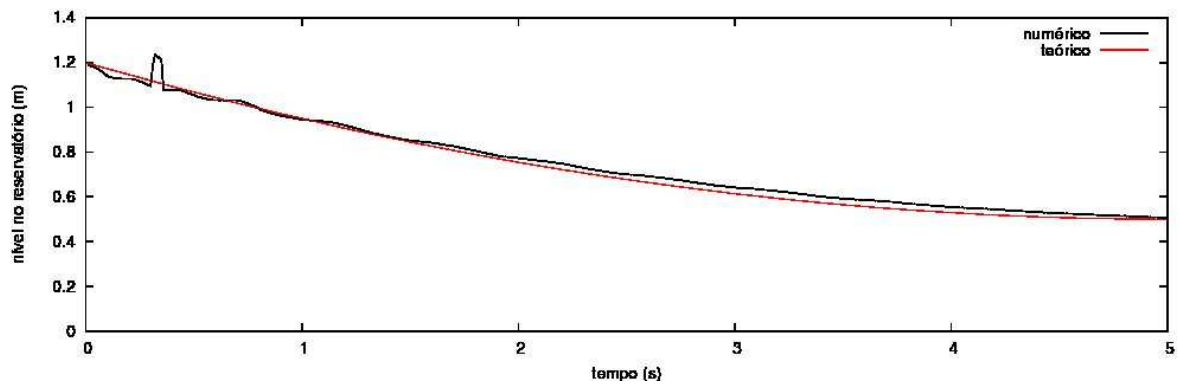


Figura 3 – Comparação teórico-numérica da variação do nível do reservatório

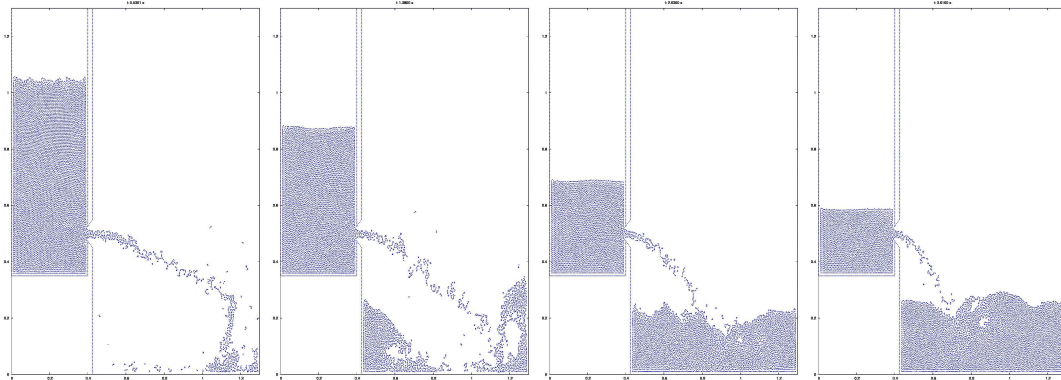


Figura 4 – Evolução temporal no problema de esvaziamento de um reservatório. As diferentes figuras (da esquerda para a direita), correspondem aos tempos 0,53, 1,38, 2,63 e 3,61 segundos de simulação. Simulação realizada com aproximadamente 13000 partículas

#### 4.2 Quebra de uma onda

É sabido que o padrão de ondas incidente em áreas costeiras é de fundamental importância, não só pela determinação de zonas com baixa influência das ondas, mas também para o dimensionamento de obras de contenção.

A dinâmica das ondas em áreas costeiras, objeto de estudo da Hidráulica Marítima, está assentada, de modo geral, na existência de um potencial de velocidades donde derivam as propriedades cinemáticas do escoamento. Uma aproximação analítica apresenta dificuldades, uma vez que as equações que regem o problema da onda, com diminuição da profundidade, têm forte característica não-linear. Nesse contexto, avaliar ainda a dinâmica da quebra da onda, torna o problema ainda mais complexo. Modelos numéricos tradicionais aplicados ao problema em foco apresentam dificuldades, mesmo em se tratando de modelos munidos de malhas adaptativas.

De modo a verificar a potencialidade do SPH, aplica-se o método ao problema da quebra da onda. Escolhe-se, para a simulação numérica, um canal com um gerador de ondas (tipo pistão) e uma praia amortecedora, conforme ilustra a figura 5.

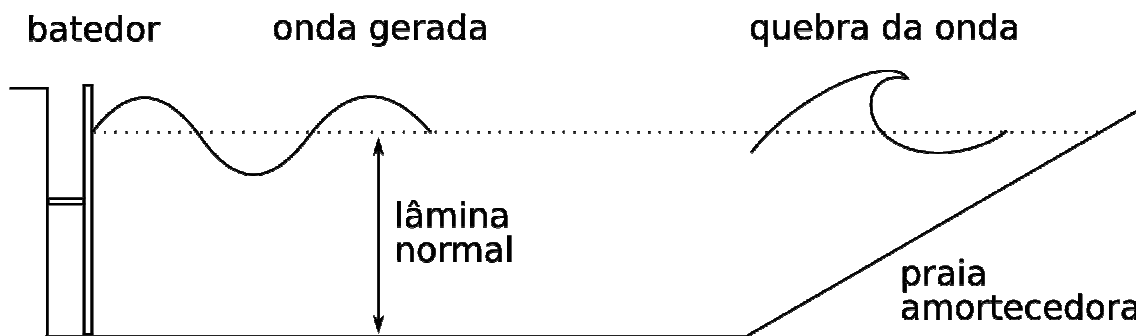


Figura 5 – Esquema do canal de ondas utilizado na simulação

O gerador de ondas, na simulação numérica, obedecia a uma lei tipo  $S \cdot \sin(w \cdot t + \varphi)$ , sendo  $w$  a frequência de 5,5Hz,  $S$  é o deslocamento (*stroke*) 0,25m. Nessa configuração, o comprimento ( $L$ ) e a altura da onda ( $H$ ) da onda gerada são de, respectivamente, 1,9m e 0,38m. Ambos resultados estão em consonância com aqueles observados na simulação.

Percebe-se que a onda gerada na situação descrita anteriormente quebrará, em considerando o critério de Mei (Mei, 1983). A figura 6 ilustra a superfície livre quando da quebra da onda.

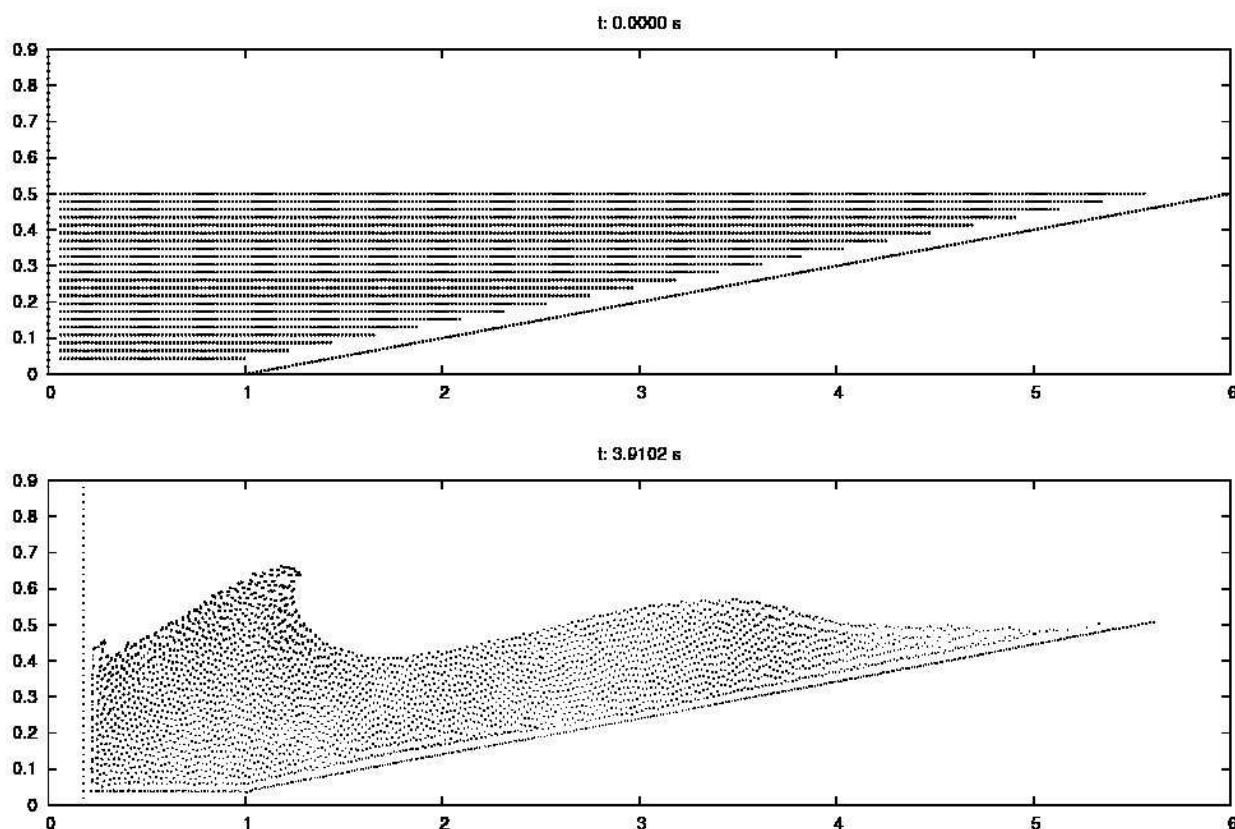


Figura 6 – Denivelção da superfície livre, para os tempos  $t = 0s$  e  $t = 3,91s$ , com  $w = 5,5Hz$ ,  $S = 0,25m$ , a declividade da praia amortecedora de 10% e a profundidade normal de 0,5m. O número de partículas é pouco maior que 4100, e o tempo de processamento (programa principal) foi da ordem de 15 minutos

## 4 DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Foi apresentada, nesse trabalho, uma breve introdução aos modelos lagrangeanos, com ênfase no SPH. Como estudos de caso para avaliação da potencialidade desse novo método, foram propostos dois problemas clássicos da Engenharia Hidráulica: o esvaziamento de um reservatório e a quebra de uma onda.

O primeiro estudo de caso, embora tenha solução simples do ponto de vista analítico-numérico, pôde-se perceber que os resultados do SPH são compatíveis com a aproximação teórica, além de fornecer indícios do escoamento caótico a jusante do orifício.

Já para a quebra da onda, assunto bastante estudado em Engenharia Oceânica, a forma da onda pôde ser reproduzida através do SPH. Esse problema, do ponto de vista numérico, é de difícil tratamento, se aplicados os métodos tradicionais de rastreamento da fronteira em VOF (*Volume of Fluid*), por exemplo.

Sendo assim, através dos estudos de caso empreendidos, onde foi observado o desempenho do SPH, pode-se dizer que o método possui potencialidades e que não se restringe a um nicho de aplicação, pois além de ser reproduzir fenômenos intrinsecamente não-lineares e/ou descontínuos (quebra da onda), também obteve resultados próximos na comparação teórico-numérica quando aplicado ao problema clássico da Hidráulica Fundamental, como o esvaziamento de um reservatório.

## BIBLIOGRAFIA

AQUELET, N. (2004). *Modélisation de l'impact hydrodynamique par un couplage fluide-structure*. Tese de Doutorado, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, França.

BEREZNITSKI, A. (2003). *Local hydroelastic response of ship structures under impact loads from water*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, São Petersburgo, Rússia.

CHENG, L. Y. (1995). *Evaluation of water impact load by numerical simulation and its applications to ship design*. Tese de Doutorado, Universidade Nacional de Yokohama, Yokohama, Japão.

CHENG, L. Y.; ARAI, M. (2002) "A numerical treatment of the boundary condition for stable assessment of hydrodynamic impact pressure" in Anais do OMA2002: 21<sup>st</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Oslo, Noruega.

KLEEFMAN, K. M. T.; FEKKEN, G.; VELDMAN, A. E. P.; IWANOWSKI, B.; BUCHNER, B. (2005). "A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems". *Journal of Computational Physics* 206, pp. 363 – 393.

- LACHAMP, P. (2003). *Modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulement de fluides à seuil par la méthode SPH*. Tese de Doutorado, Universidade Joseph Fourier, Grenoble, França.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. (1977). “*Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*”. Royal Astronomic Society 181, pp. 375–389.
- LAIGLE, D.; LACHAMP, P.; NAAIM, M. (2007). *SPH-based numerical investigation of mudflow and other complex fluid flow interactions with structures*. Computers & Geosciences 11 (4), pp. 297 – 306.
- LUCY, L. B. (1977). “*A numerical approach to the testing of the fission hypothesis*”. The Astronomical Journal 82, pp. 1013 – 1024.
- MEI, C. C. (1983). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Wiley, New York.
- MITRA, S.; SINHAMAHAPATRA, K. P. (2005). “*Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method*” in Anais do Exploring Innovation in Education and Research, Tainan, Taiwan.
- MONAGHAN, J. J. (1992). “*Smoothed particle hydrodynamics*”. Annual Review of Astronomy and Astrophysics 30, pp. 543 – 574.
- MONAGHAN, J. J.; KOS, A. (1999). “*Solitary waves on a cretan beach*”. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering 125(3), pp. 145 – 154.
- MONAGHAN, J. J.; KOS, A.; ISSA, N. (2003). “*Fluid motion generated by impact*”. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering 129(6), pp. 250 – 259.
- MORRIS, J. P. (1996). *Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications*. Tese de Doutorado, Monash University.
- OGER, G; DORING, M.; ALESSANDRINI, B.; FERRANT, P. (2007). “*An improved SPH method: Towards higher order convergence*”. Journal of Computational Physics 225, pp. 1472 – 1492.
- TANIZAWA, K. (1998). “*A time-domain simulation method for hydroelastic impact problem*” in Anais do 2<sup>nd</sup> International Conference on Hydroelasticity in marine technology, Fukuoka, Japão.
- VESENJAK, M.; MÜLLERSCHON, H.; HUMMEL, A.; REN, Z. (2004). “*Simulation of fuel sloshing - comparative study*” in Anais do LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2004.
- VILA, J. P. (1998). “*Méthodes particulières régularisées - développements récents et nouvelles applications*” in Anais do ESAIM – 29<sup>ème</sup> Congres D'Analyse Numérique, volume 3, pp. 131 – 146.