PARAMETRIZAÇÃO DE CURVAS DE INTENSIDADE DE PRECIPITAÇÃO PELO MÉTODO DE RECOZIMENTO SIMULADO

ELOY KAVISKY[1] *; LAERTES MUNHOZ DA CUNHA*[2]*; D LAMBROS*[3] *& CANDICE SCHAUFFERT GARCIA*[4]

RESUMO: Neste trabalho propõe-se novos modelos para representar as curvas “intensidade-frequência-duração” (curvas IDF), substituindo-se a distribuição de Pareto, implícita na forma convencional atualmente empregada nestas relações, por outras distribuições mais indicadas à representação de eventos extremos. Adicionalmente, utiliza-se um algoritmo estocástico de otimização, método de recozimento simulado, para o ajuste dos parâmetros do modelo, aplicado sem a necessidade de transformação de variáveis para a linearização da equação proposta. Desta forma passa-se a preservar as estatísticas da série original, e não das variáveis transformadas, constituindo-se os estimadores assim obtidos em estimadores não tendenciosos. Dos resultados obtidos observa-se ganhos significativos na modelagem proposta, representados pelo menor erro padrão da estimativa associados a todos os modelos testados, em comparação ao mesmo índice obtido com o ajuste do modelo linearizado.

ABSTRACT: In this work to introduce new models to represent the “intensity-frequency-duration” curves (IDF curves), substituting it distribution of Pareto, implicit in the form usually used in these relations, for other indicated distributions more to the representation of extreme events. Additionally, one uses a stochastic algorithm for optimization problems, method of simulated annealing, for the adjustment of the parameters of the model, applied without the necessity of transformation of variable for the linearization of the model. In such a way is transferred to preserve it the statisticians of the original series, and not of the transformed variable, consisting the gotten estimators in unbiased estimators. Of the gotten results one observes significant profits in the modeling proposal, represented for the lesser standard error of estimate associated to all the tested models, in comparison the same index gotten with the adjustment of the linearized model.

Palavras-chave: Chuvas intensas, método do recozimento simulado, curvas IDF.

[1] Engº Civil, D. Sc., Professor assistente da UFPR. Curitiba – Paraná – Brasil. Contato: ekavisky.dhs@ufpr.br/ +55 41 3361 3209
[2] Engº Civil, M. Sc., Professor adjunto da UFPR. Curitiba – Paraná – Brasil. Contato: laertes.dhs@ufpr.br/ +55 41 3361 3209
[3] Engº Civil, Especialista., Professor assistente da UFPR. Curitiba – Paraná – Brasil. Contato: lambros.dhs@ufpr.br/ +55 41 3361 3142
[4] Eng ª Civil, M.Sc., Engenheira Hidróloga da SANEPAR, Professora substituta da UFPR, Consultora da RHA Engenharia e Consultoria Ltda. Curitiba – Paraná – Brasil. Contato: csgarcia@rhaengenharia.com.br / +55 41 3232 0732.

INTRODUÇÃO

Expressões que relacionam a intensidade de precipitação com a duração e freqüência (IDF), geralmente são necessárias para a realização do planejamento e de projetos que fazem uso dos recursos hídricos. Estudos sobre relações IDF têm recebido a atenção dos hidrólogos Parigot, (1959), Fendrich, (199x), Yu *et al*. (2004), há muitos anos. Em geral utilizam-se expressões com a seguinte forma:

$$i = \frac{a.T^{b}}{(t+c)^{d}} \quad (1)$$

sendo i a intensidade de precipitação em mm/min, t a duração em minutos e T o tempo de recorrência em anos.

Geralmente os parâmetros *a, b, c* e *d*, são estimados pelo método dos mínimos quadrados ordinário após a linearização da equação (1), com o auxílio da função logaritmo. Por exemplo, para T<10 anos e 5min≤ t ≤120min, Parigot (1959) usando uma série histórica com 31 anos de observação, obteve os seguintes resultados para Curitiba: a=99,154; b=0,217; c=26 e d=1,15. Estes valores conduzem a um ajuste de mínimos quadrados com erro padrão da estimativa igual a 0,26685.

O uso de variáveis transformadas, como mencionado, produz estimadores não tendenciosos para o logaritmo da variável aleatória analisada, mas produz estimadores tendenciosos para a variável não transformada. Para análise neste trabalho pretende-se ajustar uma equação do tipo intensidade-freqüência-duração, sem transformação de variáveis, adotando um método de otimização para o sistema de equações não-lineares, de modo a preservar as estatísticas da série original. Também são investigadas equações para a parametrização IDF usando-se várias funções de distribuição de probabilidade e relações para a consideração do tempo de duração. Os parâmetros dos modelos são estimados pelo método dos mínimos quadrados, sem o uso do recurso de linearização, empregando-se o método de recozimento simulado, Mckendall *et al.* (2006); Press *et al.* (1992). O método de recozimento simulado é uma abordagem estocástica usada para solucionar problemas de otimização combinatorial. As idéias básicas do método surgiram a partir de processos de recozimento de sólidos Mckendall *et al.* (2006), Press *et al.* (1992). Este método tem sido utilizado em larga escala e com sucesso, para solucionar problemas de otimização em várias áreas. Como por exemplo: o problema do caixeiro viajante, Press *et al.* (1992), o projeto de circuitos integrados complexos, Press *et al.* (1992), sistemas regionais de águas residuais, Cunha e Souza, (2001), projetos para a alocação ótima dos recursos em indústrias Mckendall *et al.* (2006).

No próximo item é feita uma análise expedita do modelo convencional adotado para representar a função IDF. Na seqüência descreve-se o método de otimização a ser empregado e apresenta-se um estudo de caso para a região de Curitiba. Para finalizar o trabalho fazem-se comentários sobre as conclusões do mesmo.

CURVAS INTENSIDADE-DURAÇÃO-FREQÜÊNCIA

Analisando-se a expressão (1) verifica-se que segundo Kaviski, (1992): (i) o termo $a.T^b$ é equivalente à distribuição de probabilidades de Pareto (ver a forma da função densidade de probabilidade na Tabela 1), e que (ii) a variável $i.(t+c)^d$ é distribuída segundo o modelo de Pareto. Pinto (1976) faz o uso de gráficos para justificar o uso de relações com a forma de (1). Nestes gráficos nota-se imediatamente que a intensidade média máxima cresce com o tempo de retorno, ou seja, cresce conforme seja mais raro o evento. Tomando-se as intensidades máximas médias do mesmo período de recorrência e grafando-as contra as respectivas durações, revela-se uma família de curvas, em que as intensidades decrescem com o aumento da duração, para um episódio pluvial isolado.

Inspirando-se na conclusão anteriormente descrita, neste trabalho são investigados modelos para a parametrização IDF com a seguinte forma geral:

$$i = f(T)/g(t). \qquad (2)$$

A expressão (2) pode ser representada como:

$$ig(t) = f(T). \qquad (3)$$

Com a expressão (3) interpreta-se que a variável $ig(t)$ é modelada genericamente segundo a distribuição de probabilidades $f(T)$. As justificativas de Pinto (1976) podem ser consideradas como válidas para a expressão (2)

As funções de distribuição de probabilidades investigadas neste trabalho são as seguintes: Pareto, Exponencial, Lomax, Weibull, Log-Gumbel e Log-Normal. As expressões destas funções densidade de probabilidade são apresentadas na Tabela 1.

Na Tabela 2 estão relacionadas as funções $g(t)$. Estas funções são recomendadas na literatura na parametrização de relações IDF como em Stedinger *et al*. (1992).

Tabela 1 - Funções Densidade de Probabilidade

Nº	*Modelo*	*f(T)*
1	Pareto	aT^b
2	Exponencial	$m + a \ln T$
3	Lomax	$m + a T^b$
4	Weibell	$m + a (\ln T)^b$
5	Log-Gumbel	$m + \exp\{b - a \ln [\ln T - \ln (T-1)]\}$
6	Log-Normal	$m + \exp [b + az(T)]$ $z(T) = \Phi^{-1} (1 - 1/T)$ $\Phi(z) = (1 / \sqrt{2x}) \int_{-\infty}^{z} \exp (-x^2/2)\, dx$

Tabela 2 – Funções g(t)

Nº	*g(t)*
1	$(t + c)^d$
2	$(t + c)^d / t$
3	$\ln [(t + c)^d]$
4	$t^d + c$

MÉTODO DE RECOZIMENTO SIMULADO

O método de recozimento simulado foi concebido por analogia com o método proposto por Metropolis *et al.* (1953), utilizado para simular pelo método de Monte Carlo problemas de física estatística, Press *et al.* (1992), Lage, (1995).

O uso do algoritmo de Metropolis pode ser descrito considerando-se um sistema cujos estados são não-degenerados com energias $E_1<E_2<E_3$.... O objetivo do problema consiste em simular a evolução do sistema em equilíbrio térmico que se encontra na temperatura T. Considera-se inicialmente que o sistema encontra-se no estado j (energia Ej). O sistema poderá transitar para quaisquer um dos outros estados f. A viabilidade da mudança de estado é estabelecida calculando-se o acréscimo de energia $\Delta E=Ej–Ef$ e o fator de Boltzmann $\exp[–\Delta E/(kT)]$, sendo k a constante de Boltzmann (1,380658/10²³ J/K). Gera-se um número aleatório uniforme p ($0\leq p\leq 1$) e compara-se com o fator de Boltzmann: (i) se $p>\exp[–\Delta E/(kT)]$, a proposta é recusada, permanecendo o sistema no estado j; (ii) se $p\leq\exp[–\Delta E/(kT)]$, a proposta é aceita, e o sistema será alterado para o estado f.

Como conseqüência, se $\Delta E<0$, ou seja, ao transitar é diminuída a energia do sistema, a proposta é sempre aceita; e se $\Delta E>0$, a proposta pode ser aceita com probabilidade p, e caso seja aceita, significa que aumentará a energia do sistema, sendo este o aspecto, um pouco diferente da idéia que um sistema tende sempre a diminuir a sua energia, que fortalece e acrescenta importância ao algoritmo de Metropolis.

Para fazer uso do algoritmo de Metropolis para solucionar outros problemas de otimização, devem ser conhecidos os seguintes elementos, Press *et al.* (1992): (i) descrição das possíveis configurações do sistema; (ii) um gerador aleatório para realizar mudanças na configuração; estas mudanças são opções que devem fazer parte das configurações do sistema; (iii) uma função objetivo E (analogia com energia) cuja minimização é o objetivo do procedimento; e (iv) um parâmetro de controle (analogia com temperatura) e um esquema de recozimento para que o sistema possa ser conduzido para o menor valor da função objetivo.

Para atender os propósitos deste trabalho a função objetivo é definida como a variância amostral dos resíduos entre os valores estimados pelos modelos, com a forma geral expressa na equação (2), e os valores observados para a intensidade de precipitação. As variáveis de decisão são os parâmetros dos modelos investigados (a,b,c,d,m).

A solução inicial é obtida através de amostragem aleatória. De maneira independente, para cada um dos componentes do vetor de variáveis de decisão, são gerados valores uniformemente distribuídos compreendidos nos seus respectivos limites de validade. Na seqüência verifica-se através das equações de restrições a viabilidade da solução. O processo é repetido até que seja obtida uma solução aleatória viável.

O algoritmo de Metropolis é usado para gerar um conjunto de pontos num espaço de variáveis distribuídas com função densidade de probabilidade estimada pelo fator de Boltzmann. O parâmetro kt inicialmente foi adotado como 0,5 sendo posteriormente reduzido por um fator igual a 0,9 em cada um dos 100 passos considerados. Desta forma, gera-se uma seqüência de pontos (identificados pelo vetor $\boldsymbol{X}$, cujos componentes são as variáveis de decisão) representando um caminho aleatório movendo-se através do espaço configurado.

As regras pelas quais o caminho aleatório é realizado no espaço são as seguintes: (i) considera-se que o caminho aleatório encontra-se no ponto $\boldsymbol{X}_n$; (ii) para gerar o ponto $\boldsymbol{X}_{n+1}$ aplica-se um processo iterativo. O novo ponto pode ser escolhido aleatoriamente sobre a superfície de uma hiperesfera com raio de pequena dimensão δ, em torno do ponto $\boldsymbol{X}_n$; (iii) sorteando-se um possível ponto $\boldsymbol{X}_t$, esta solução é aceita ou rejeitada considerando-se a razão:

$$r = \exp[-\Delta E/(kT)], \qquad (4)$$

Sendo $\Delta E = E(\boldsymbol{X}_n) - E(X_t)$, onde $E(\boldsymbol{X}_n)$ é o valor da função objetivo no ponto $\boldsymbol{X}_n$ e $E(X_t)$, o valor no ponto X_t; (iv) Se $r>1$, então o ponto $\boldsymbol{X}_t$ é aceito ($\boldsymbol{X}_{n+1}=\boldsymbol{X}_t$), enquanto que se $r<1$, o ponto $\boldsymbol{X}_t$ é aceito com probabilidade r. Este procedimento é realizado comparando-se r com um número u uniformemente distribuído no intervalo [0,1], aceitando-se $\boldsymbol{X}_t$, se $u<r$. Quando o ponto $\boldsymbol{X}_t$ não é aceito o caminho aleatório permanece no ponto $\boldsymbol{X}_n$ ($\boldsymbol{X}_{n+1}=\boldsymbol{X}_n$); e (v) gera-se o ponto $\boldsymbol{X}_{n+2}$ usando-se o mesmo procedimento.

O valor de δ deve ser escolhido de forma que 1/3 a 1/2 das configurações geradas sejam aceitas, caso contrário o método torna-se pouco eficiente, Koonin e Meredith, (1990). Se houver uma grande quantidade de configurações rejeitadas significa que o valor de δ é muito grande; caso contrário, se δ é muito pequeno, há muitas configurações aceitas, mas a região explorada pelo método é pequena. A melhor escolha para o ponto inicial $\boldsymbol{X}_0$ encontra-se onde a distribuição de probabilidades $\exp[-E(\boldsymbol{X}_0)/(kT)]$ corresponda a um máximo.

ESTUDO DE CASO E RESULTADOS

O estudo de caso foi realizado com os dados organizados por Parigot (1959), da estação pluviográfica de Curitiba do Departamento Nacional de Meteorologia – DNMET, observados durante um período de 31 anos (1921-1951).

O método descrito no item anterior foi aplicado aos modelos listados na Tabela 1. Os parâmetros determinados e a variância amostral estimada (valor mínimo da função objetivo obtido com a aplicação do método do recozimento simulado) são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros dos Modelos

g(t)	*f(T)*	*a*	*b*	*c*	*d*	*m*	*s²*
1	1	76.16840	0.199778	1.086268	24.67603		0.198377
1	2	19.96455		1.090151	24.85968	75.89085	0.194440
1	3	93.75479	0.199443	1.127800	26.56166	0.008374	0.199463
1	4	19.26187	1.024672	1.087491	24.75921	75.22096	0.194171
1	5	0.376561	3.314090	1.091672	24.94803	59.49308	0.182592
1	6	0.819951	2.857834	1.089835	24.85905	72.51932	0.184385
2	1	17.53372	0.200131	1.795945	3.439386		0.236255
2	2	4.533812		1.797418	3.453629	17.24067	0.232266
2	3	17.51278	0.200427	1.796539	3.446278	0.068824	0.236308
2	4	4.421710	1.025219	1.797372	3.454398	17.31973	0.231995
2	5	0.372330	1.837711	1.796941	3.451656	13.29455	0.220567
2	6	0.815228	1.384125	1.797072	3.453149	16.43911	0.222303
3	1	3711.809	0.199394	5.723247	37.66108		0.199285
3	2	979.4254		5.739274	37.81753	3720.222	0.195280
3	3	2885.037	0.219121	5.640328	36.99276	368.2318	0.201291

$g(t)$	$f(T)$	*a*	*b*	*c*	*d*	*m*	s^2
3	4	832.4713	1.027808	5.656102	37.14012	3271.293	0.195125
3	5	0.146456	8.276048	5.698482	37.48178	68.64311	0.234118
3	6	0.822220	6.842666	5.796809	38.33559	3913.089	0.185363
4	1	59.11929	0.199545	1.040687	25.50879		0.198538
4	2	15.38236		1.043483	25.85328	58.36514	0.194561
4	3	58.80699	0.202232	1.043176	25.84301	0.940906	0.198736
4	4	15.02745	1.025857	1.043909	25.95065	58.80833	0.194292
4	5	0.376112	3.045812	1.043222	25.88221	45.39994	0.182717
4	6	0.817204	2.603539	1.043848	25.91099	55.88647	0.184504

CONCLUSÕES

O tratamento matemático facilitado com o advento dos computadores e novas técnicas de otimização numérica possibilitaram as investigações acerca do modelo proposto para as curvas IDF, bem como para a solução de ajustes dos parâmetros sem a necessidade de transformação de variáveis. Desta análise podemos concluir: i) o erro padrão da estimativa correspondente a todos os modelos propostos resultaram inferior ao obtido pela otimização baseada na linearização das curvas IDF; ii) os modelos log-Normal e log-Gumbel forneceram os melhores resultados podendo-se atribuir este ao fato à adequação destes modelos no estudo de eventos extremos; iii) o método de otimização do recozimento simulado mostrou-se eficiente na solução ótima de equações não-lineares; iv) o modelo proposto por Parigot é um marco em estudos desta natureza, mostrando uma forma alternativa e simplificada na solução de problemas complexos; v) seria recomendável ampliar o estudo baseado na série atualizada das chuvas intensas; vi) pretende-se investigar a igualdade estatística dos parâmetros do modelo, quando os ajustes são realizados para durações individualizadas dos eventos pluviais.

BIBLIOGRAFIA

CUNHA, M.C., SOUZA, J. (2001). "*Hydraulic infrastructures design using simulated annealing*". Journal of Infrastructure Systems, 7 (1), 32-39.

FENDRICH, R. (2005). *Chuvas Intensas para Obras de Drenagem no Estado do Paraná***,** Editora Universitária

KAVISKI, E. (1992). *Métodos de Regionalização de Eventos e Parâmetros Hidrológicos***.** Dissertação de Mestrado, UFPR.

KOONIN, S.E., MEREDITH, D.C. (1993). *Computational Physics***.** Fortran Version. Ed. Addison-Wesley.

LAGE, E.J.S. (1995). *Física Estatística***.** Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

MCKENDALL, A.R,; SHANG, J., KUPPUSAMY, S. (2006). "*Simulated annealing heuristics for the dynamic facility layout problem*". Computer & Operations Research, 33, 2431-2444.

METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A.W., ROSENBLUTH, M.N., TELLER, A.H. (1953). *Equation of state calculations by fast computing machines,* J. Chem.Phys. 21 (6), 1087.

PARIGOT, P.V. (1955) *"Possibilidades pluviais de Curitiba, em relação a chuvas de grande intensidade"*. Revista Técnica n° 27**.**

PINTO, N.L.S. (1976) *"Precipitação"* i*n: Hidrologia Básica***,** Edgard Blücher.

PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. (1992). *Numerical Recipes in Pascal.* Cambridge.

STEDINGER, J.R., VOGEL, R.M., FOUFOULA-GEORGIOU, E. (1992). *"Frequency Analysis of Extreme Events" in: Handboolk of Hydrology***,** Ed. McGraw-Hill.

YU, P.-S., YANG, T.C., LIN, C.-S. (2004). *"Regional rainfall intensity formulas based on scaling property of rainfall"*. J. Hydrology 295, 108-123.