

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE RICHARDS PELO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

*Michael Mannich<sup>1</sup> & Alexandre K. Guetter<sup>2</sup>*

**RESUMO** --- As soluções analíticas são comumente usadas para avaliar o desempenho de esquemas numéricos. A Equação de Richards é uma equação diferencial parcial parabólica não-linear que governa o processo de infiltração de água no solo. O esquema numérico de volumes finitos é avaliado em comparação com uma solução analítica da Equação de Richards. As condições de contorno utilizadas são sucção mátrica prescrita constante no bordo inferior e fluxo prescrito constante no contorno superior. Foram simulados nove casos, variando o refinamento da malha no tempo e no espaço. O método dos volumes finitos apresenta erros e desvios pequenos em relação à solução analítica inclusive com grades mais grosseiras. As maiores fontes de erro provavelmente se devem à iteratividade necessária para resolver as equações visto que a condutividade hidráulica é dependente de  $\psi$  e esta não pode ser explicitada. A conservação de massa varia significativamente com a resolução temporal. Os maiores erros no espaço são registrados junto aos contornos, correspondentes ao nível freático e à superfície. Esses resultados são elementos parciais de um projeto mais amplo, cujo objetivo é aplicar conceitos estocásticos para que a equação de Richards seja aplicada em escalas compatíveis com as dos modelos hidrológicos e climáticos operacionais.

**ABSTRACT** --- Analytical solutions are generally used to assess the accuracy of numerical schemes. The Richards equation is a partial differential, parabolic, and non linear that governs the water infiltration process through the soil. Numerical approximations based on different forms of the governing partial differential equation can lead to significantly different results for unsaturated flow problems. The finite volume numerical scheme was applied to the Richards equation to simulate the transient pressure distribution during one-dimensional, vertical infiltration toward the water table through homogeneous soils. The boundary conditions were a prescribed suction head at the lower boundary and a prescribed flux at the surface. The numerical results were compared with an analytical solution for nine different combinations of both time and space resolutions. The errors of the finite volume scheme were small with respect to the analytical solution, even for coarse numerical grids. The conclusions were that mass conservation depends on the selection of time resolution, and that the largest error of the suction pressure profile occurred close to both upper and lower boundaries. These were partial results of a project that aims to upscale the Richards equation for soil moisture dynamics to be utilized in both hydrological and atmospheric mesoscale models.

**Palavras-chave:** volumes finitos; equação de Richards; solução analítica

---

1) Engenheiro Ambiental, Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental da Universidade Federal do Paraná. Caixa Postal 19011, Curitiba, PR, CEP 81531-990. Tel: (41)3361-3142. E-mail: mannich@ufpr.br.

2) Professor do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR. E-mail: guetter.dhs@ufpr.br.

## 1 - INTRODUÇÃO

Os modelos de balanço hídrico são importantes em aplicações de hidrologia, ecologia e agricultura que tratam do armazenamento e transporte de água no meio-ambiente. O balanço hídrico para a zona não-saturada do solo (ou vadosa) é tipicamente usado para repartir a chuva nos fluxos de infiltração e escoamento superficial, e para estimar os fluxos que saem do solo como evapotranspiração e drenagem para o lençol freático. Em hidrologia, o modelo de balanço hídrico para a zona vadosa condiciona o escoamento superficial e estima a recarga do aquífero; mas o balanço também é usado em hidrogeologia para estimar o transporte de contaminantes através do lençol freático. Em meteorologia e clima, a umidade e temperatura do solo, servem como condições de contorno para os processos atmosféricos; sendo que a evapotranspiração e infiltração são os fluxos de entrada e saída de água, respectivamente, do solo para a atmosfera.

A maior parte dos modelos de balanço hídrico para a zona não saturada do solo assume um conjunto de hipóteses simplificadoras, ou parametrizações, dos processos físicos que descrevem o movimento da água no solo. As principais simplificações são aplicadas aos fluxos de infiltração, evaporação, drenagem (ou percolação), e demanda pelas plantas (ou transporte ascendente); sendo que nestes fluxos a água está na fase líquida, com exceção da evaporação (fase gasosa). O uso de parâmetros empíricos para aproximação dos processos físicos no modelo de balanço hídrico é justificado pela grande variabilidade espacial e temporal das forçantes meteorológicas (chuva, vento e temperatura do ar) e pela significativa variabilidade espacial das propriedades hidráulicas do solo. Essas parametrizações são aplicadas tanto nos modelos hidrológicos quanto nos modelos de previsão numérica de tempo que simulam os processos entre o solo, vegetação e atmosfera. Esses modelos de previsão hidrológica e meteorológica são aplicados para escalas que são consideradas grandes ( $\Delta > 1$  km) relativamente às escalas em que prevalece a homogeneidade espacial das propriedades dos solos e da vegetação. Todavia, as simplificações no balanço hídrico garantem rapidez e robustez às integrações computacionais, que são requisitos para os modelos operacionais simularem os fluxos e armazenamentos de água em grandes regiões, durante longos períodos de integração. Exemplos de modelos hidrológicos que descrevem formulações parametrizadas do balanço na zona vadosa são apresentados em Chow et al.(1988), Bras (1990), Simmons e Meyer (2000). Há várias versões de modelos hidrológicos que são usados nos modelos numéricos de circulação geral da atmosfera, são exemplos o esquema chuva-vazão do modelo ECHAM, ou modelo climático de Hamburgo, em Dümenil e Todini (1992); o esquema de transferência entre a biosfera e atmosfera do modelo CCM, em Dickinson et al. (1986); a formulação fundamentada na equação de Richards proposta por Chen et al. (1993).

A equação de Richards (Richards, 1931) representa os fluxos na zona vadosa, sendo aplicada na escala local, mas podendo ser estendida para escalas maiores (Haverkamp et al., 1998). Essa equação diferencial parcial não-linear descreve o escoamento transiente em solos não saturados com o uso da Lei de Darcy. A variável de estado é o conteúdo de umidade no solo que se relaciona, de forma complexa, com as propriedades do solo (condutividade hidráulica não-saturada) e com a tensão de capilaridade. Há um grande número de publicações recentes sobre as soluções numéricas e analíticas da equação de Richards, demonstrado que a sua aplicação para simular o escoamento na zona não-saturada do solo ainda é um grande desafio para o hidrólogo. A validade da equação de Richards para simular o escoamento na zona vadosa já foi bem estabelecida para condições de laboratório (solos homogêneos e com condições de contorno controladas). Todavia, apesar da qualidade de sua fundamentação teórica, ainda persistem as dificuldades para a aplicação da equação de Richards nas escalas dos modelos hidrológicos e climáticos. Nos modelos operacionais, cada ponto de grade representa áreas com dezenas de quilômetros quadrados em que a variabilidade espacial das propriedades do solo e dos forçantes climáticos são tipicamente representados apenas por suas médias espaciais. A adoção da hipótese de se representar a variabilidade espacial na região por sua média, para então integrar a equação de Richards, produz resultados incorretos sobre a variação do conteúdo da umidade do solo segundo a profundidade e o tempo.

Esse trabalho aborda as soluções analíticas e numéricas da equação de Richards. O seu objetivo específico é o de avaliar os erros numéricos na solução da equação com o método dos volumes finitos, sendo que os erros foram estimados a partir de condições idealizadas (ou de laboratório) para as quais há uma solução analítica. A sua aplicação imediata seria na estimativa das propriedades hidráulicas do solo através das medidas em campo do perfil de umidade do solo, usando o método da solução inversa da equação de Richards, no qual se ajustam os parâmetros das propriedades do solo até que haja a concordância entre a solução do modelo e as medições em campo.

Essa etapa deste trabalho tem um viés para pesquisa básica, em detrimento das aplicações em bacias naturais. Todavia, além de sua aplicação na estimativa das propriedades do solo através da solução inversa, há um objetivo mais amplo que é o de aprimorar os modelos hidrológicos e climáticos através do melhor conhecimento dos processos fundamentais, do qual o balanço hídrico da zona não-saturada do solo é um dos seus componentes. Para que se possa atingir este objetivo é necessário que se apliquem técnicas de perturbação e conceitos estocásticos para que a equação de Richards simule os processos no solo em escalas compatíveis com as dos modelos hidrológicos e climáticos operacionais.

Este artigo está organizado em cinco capítulos. O capítulo 2 apresenta uma síntese da revisão bibliográfica. No capítulo 3, sobre materiais e métodos, são apresentados de maneira sucinta a

derivação da solução analítica e o esquema numérico de volumes finitos, com as equações discretizadas. No capítulo 4, de resultados e discussões, são avaliados os erros numéricos e o desempenho do método. O capítulo 5 resume as conclusões e recomendações.

## **2 – REVISÃO DA LITERATURA**

A importância da infiltração e o transporte e armazenamento da água na camada superior em hidrologia, ciência dos solos, irrigação e drenagem, e em gestão de recursos naturais e ambiental foi discutida por Ross (1990). A equação de Richards é considerada a equação governante do escoamento transiente da água em solos.

Richards foi o primeiro a apresentar formalmente a equação diferencial parcial não-linear que descreve o escoamento transiente em solos não saturados. Narasimhan (1998) apresentou uma revisão da evolução histórica das idéias que nortearam a caracterização das propriedades do solo e a formulação do seu balanço hídrico, onde qualificou o período de 1920-1940 como sendo notável em virtude das contribuições para o avanço do conhecimento sobre o transporte e armazenamento da água no solo desde Darcy (1856). Narasimhan (1998) resumiu a descrição dos trabalhos de Richards em 1931, que em conjunto com os de Gardner em 1921, Terzaghi em 1924 e Theis em 1935, estabeleceram os fundamentos científicos que são as bases do conhecimento do escoamento na zona não-saturada do solo. A equação de Richards permaneceu sem solução por quase duas décadas em virtude das dificuldades em produzir soluções analíticas para equações não lineares. Somente a partir de 1950 é que se produziram as soluções numéricas e analíticas para a equação de Richards, que inicialmente resultaram de condições altamente idealizadas e que gradativamente passaram a representar as complexidades dos solos e forçantes naturais com a crescente disponibilidade e barateamento dos recursos computacionais. A primeira solução apresentada para a equação de Richards, em 1950, foi uma solução analítica em que a severidade da não-linearidade dessa equação parabólica foi reduzida através do uso do conteúdo de umidade volumétrica como variável dependente, ao invés do potencial de capilaridade. Novas técnicas para as soluções analíticas também tem sido desenvolvidas, embora para condições mais restritivas que as soluções numéricas.

As soluções analíticas da Equação de Richards são comumente usadas para avaliar e comparar o desempenho e a precisão de esquemas numéricos (Ross e Parlange, 1994). As soluções analíticas da equação diferencial também oferecem informações importantes sobre a física do fenômeno e permitem identificar a relação e dependência do resultado com as variáveis. Em contrapartida, os métodos numéricos associados aos avanços no desempenho dos computadores, oferecem ferramentas poderosas para resolver problemas complexos e não-lineares, embora sejam menos didáticos para que o usuário desenvolva sensibilidade na associação dos resultados com a

formulação e as hipóteses assumidas (Menziani et al., 2006). Narasimhan (1998) descreve que as primeiras soluções numéricas foram desenvolvidas por Klute em 1952 e Philip em 1955.

Os trabalhos sobre a solução da equação de Richards com métodos analíticos são menos numerosos do que os numéricos, porque exigem maior cuidado e persistência no seu desenvolvimento. A maioria das soluções analíticas deriva de linearizações da equação, baseadas em considerações a respeito da difusividade da água no solo e da dependência da condutividade hidráulica com o teor de umidade do solo (Basha, 2000). As considerações mais comuns são a dependência exponencial da condutividade hidráulica com a sucção mátrica e a hipótese que a difusividade da água no solo seja constante ou então seja proporcional ao inverso do teor de umidade.

As soluções numéricas com os métodos de diferenças finitas e elementos finitos já foram amplamente estudados e apresentam grandes erros de balanço de massa, principalmente em malhas mais grosseiras (Celia et al., 1990).

Desde a década de 1950 tem havido um fluxo constante de trabalhos sobre a solução das equações de Richards, refletindo o desafio na aplicação de métodos matemáticos e de amostragem das propriedades do solo para a simulação do balanço hídrico. Uma amostra dos trabalhos mais recentes ilustra a vitalidade da pesquisa tanto nos métodos analíticos quanto nos numéricos. Chen et al. (2001) aplicou um método analítico para condições de contorno simplificadas, e Varado et al. (2006) avaliaram a eficiência de uma solução numérica para um problema unidimensional.

### 3 – MATERIAIS E MÉTODOS

Nesse trabalho foi usada uma solução analítica para avaliar os erros de balanço de massa decorrentes do uso de um esquema numérico de volumes finitos para solucionar a Equação de Richards. A solução analítica aqui adotada foi detalhada em Srivastava e Yeh (1991).

#### 3.1 – Equação Governante e Condições de Contorno

A equação de Richards foi derivada a partir dos conceitos de conservação de massa (conteúdo de umidade do solo) e da equação de Darcy, com o uso condutividade hidráulica do solo não saturado. Essa equação se torna complicada devido à relação não linear entre a retenção de água e a condutividade hidráulica. A equação de Richards que governa o escoamento não-saturado vertical unidimensional é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

onde:  $z$  é a coordenada vertical, positiva no sentido de baixo para cima,  $K$  é a condutividade hidráulica não saturada que é função da sucção mátrica  $\psi$  (negativa para escoamento não saturado) ou tensão de capilaridade no solo,  $\theta$  é o conteúdo de umidade, e  $t$  representa o tempo.

As dependências da condutividade hidráulica e da umidade com a sucção mátrica são dadas pelas relações constitutivas de Gardner (1958), respectivamente:

$$K = K_s e^{\alpha\psi} \quad (2)$$

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha\psi} \quad (3)$$

onde  $K_s$  é a condutividade hidráulica saturada,  $\theta_r$  é o conteúdo de umidade residual,  $\theta_s$  é o conteúdo de umidade de saturação, e  $\alpha$  é o parâmetro que avalia a entrada de ar que representa a taxa de redução da condutividade hidráulica ou da umidade para  $\psi$  cada vez menor.

As condições de contorno aplicadas são sucção prescrita  $\psi_0$  no bordo inferior da camada de solo,  $z = 0$ , e fluxo prescrito  $q_B$  na superfície do solo,  $z = L$ . As condições são matematicamente expressas, respectivamente, por:

$$\psi(0, t) = \psi_0 \quad (4)$$

$$\left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi) \right]_{z=L} = q_B \quad (5)$$

A condição inicial é a distribuição de sucção mátrica correspondente à solução estacionária da equação (1) sob a mesma condição de fluxo prescrito  $\psi_0$  no bordo inferior e fluxo prescrito  $q_A$  na superfície:

$$\psi(z, 0) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ q_A - (q_A - e^{\alpha\psi_0}) e^{-z} \right] \quad (6)$$

### 3.2 – Solução Analítica

Srivastava e Yeh (1991) obtiveram uma solução analítica para a distribuição uni-dimensional da pressão no solo em regime gradiente, assumindo que o solo fosse homogêneo e que a taxa de percolação no lençol freático fosse homogênea. Matematicamente essas condições consistem na, linearização da equação (1) com o uso das equações (2) e (3), e da aplicação das condições de contorno e inicial das equações (4), (5) e (6). A solução analítica de Srivastava e Yeh (1991) é resultante do uso da transformação de Laplace:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ q_B - (q_B - e^{\alpha\psi_0}) e^{-z} - 4(q_B - q_A) e^{\alpha(L-z)/2} e^{-t/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[\alpha L \lambda_n] \text{sen}[\alpha z \lambda_n] e^{-\lambda_n^2 t}}{1 + \alpha L/2 + 2\alpha L \lambda_n^2} \right\} \quad (7)$$

A transformação de Laplace implica na determinação de pólos que são as raízes das equações transformadas, sendo que os polos estão associados com o parâmetro auxiliar  $\lambda$ . O valor de  $\lambda_n$  é obtido através da  $n$ -ésima raiz positiva da equação característica:

$$\tan(\alpha L \lambda) + 2\lambda = 0 \quad (8)$$

As equações (7) e (8) representam a variação da pressão mátrica segundo a profundidade e o tempo. A variação do conteúdo de umidade é obtida com a substituição da pressão mátrica na equação (3); dessa forma as equações (3), (7) e (8) representam os processos gradientes de umedecimento e drenagem do solo.

A vazão específica de drenagem, ou fluxo descendente, em uma determinada altura  $z$  da camada de solo para qualquer tempo foi derivada por Srivastava e Yeh (1991) como sendo:

$$q_t = K_s q_B - 4 K_s (q_B - q_A) e^{L/2} e^{-t/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \lambda_n \cos(\alpha z \lambda_n) + \frac{\text{sen}(\alpha z \lambda_n)}{2} \right] \text{sen}(\alpha L \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 t}}{1 + \alpha L/2 + 2\alpha L \lambda_n^2} \quad (9)$$

A solução analítica de Srivastava e Yeh (1991), dada pelas equações (7), (8) e (9) é restrita às condições em que as propriedades do solo possam ser representadas pelas relações constitutivas exponenciais de Gardner, mas pode ser aplicada para solos estratificados. Embora, esse resultado possa ser muito limitado para aplicações práticas em condições de campo, esta solução analítica é valiosa para a avaliação dos erros resultantes da aplicação de métodos numéricos. Os problemas mais comuns dos métodos numéricos são a convergência e conservação de massa, principalmente para infiltração em solos muito secos e estratificados (variação das propriedades hidráulicas na vertical).

### 3.3 – Solução Numérica

No esquema numérico de volumes finitos a discretização da equação governante é feita por meio da integração em volumes de controle elementares e interpolação, fornecendo como resultado uma equação algébrica para os volumes de controle no domínio de cálculo (Maliska, 1995).

A equação de Richards, equação (1), é função das duas variáveis dependentes  $\theta$  e  $\psi$ , portanto tanto para soluções analíticas quanto numéricas é necessária uma equação que relacione ambas, neste trabalho corresponde à equação (3). Para facilitar a solução numérica é preciso escrevê-la em função de uma das variáveis. Uma forma comum é deixá-la em função apenas da variável  $\psi$  (Rathfelder e Abriola, 1994):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10)$$

A Figura 1 apresenta um esquema da grade espacial, os volumes de controle e sua numeração e a aplicação das condições de contorno (note que o eixo z representado na horizontal corresponde à distância vertical ou profundidade).

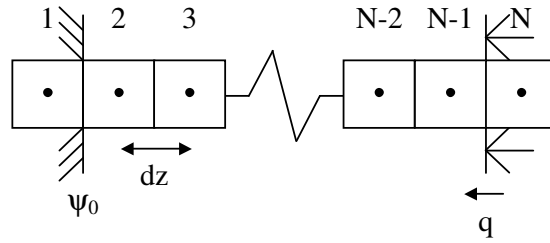


Figura 1 – Representação da grade e das condições de contorno

A discretização da equação (10) em volumes finitos com interpolação linear produz:

$$a_p \psi_i^{n+1} = a_e \psi_{i+1}^{n+1} + a_w \psi_{i-1}^{n+1} + b_p \quad (11)$$

onde:

$$a_e = \frac{K_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (12)$$

$$a_w = \frac{K_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (13)$$

$$a_p = a_e + a_w + \frac{C_i^n + C_i^{n+1}}{\Delta t} \quad (14)$$

$$b_p = \frac{\Psi_i^n}{\Delta t} (C_i^n + C_i^{n+1}) + \frac{1}{\Delta z} \left[ \left[ K_{i+1/2}^n \left( \frac{\Psi_{i+1}^n - \Psi_i^n}{\Delta z} + 1 \right) - K_{i-1/2}^n \left( \frac{\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n}{\Delta z} + 1 \right) + K_{i+1/2}^{n+1} - K_{i-1/2}^{n+1} \right] \right] \quad (15)$$

$$C = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \alpha e^{\alpha \psi} \quad (16)$$

A condutividade hidráulica do solo não-saturado,  $K$ , é calculada através da média harmônica dada por:

$$K_{i\pm 1/2}^n = 2 \frac{K_i^n K_{i\pm 1}^n}{K_i^n + K_{i\pm 1}^n} \quad (17)$$

As equações de (12) a (15) valem apenas para os nós internos,  $i=2, \dots, N-1$ . Aplicando as condições de contorno em volumes finitos, então a condição na fronteira inferior (equação 11),  $i=1$ , produz os parâmetros:

$$a_p = -a_w = 1 \quad (18)$$



$$a_e = 0 \quad (19)$$

$$b_p = 2\psi_0 \quad (20)$$

Para a condição de contorno superior,  $i=N$ , os parâmetros apresentam a forma:

$$a_p = a_w = 1 \quad (21)$$

$$a_e = 0 \quad (22)$$

$$b_p = \left( \frac{q_B - K_{i-1/2}^{n+1}}{K_{i-1/2}^{n+1}} \right) \Delta z \quad (23)$$

A equação (10) para o regime estacionário é:

$$a_p \psi_i = a_e \psi_{i+1} + a_w \psi_{i-1} + b_p \quad (24)$$

onde:

$$a_e = \frac{K_{i+1/2}}{\Delta z} \quad (25)$$

$$a_w = \frac{K_{i-1/2}}{\Delta z} \quad (26)$$

$$a_p = a_e + a_w \quad (27)$$

$$b_p = K_{i+1/2} - K_{i-1/2} \quad (28)$$

As equações de (25) a (28) valem apenas para os nós internos,  $i=2, \dots, N-1$ . Os parâmetros para a condição de contorno inferior são os mesmos para a discretização transiente. Para a condição na fronteira superior,  $i=N$ , na forma da equação (24) se altera apenas o parâmetro  $b_p$ :

$$b_p = \left( \frac{q_A - K_{i-1/2}}{K_{i-1/2}} \right) \Delta z \quad (29)$$

O algoritmo para a solução numérica da equação de Richards, com o esquema dos volumes finitos, consiste na execução das cinco etapas enumeradas e descritas abaixo:

- (1) Leitura dos parâmetros  $K_S$ ,  $\alpha$ ,  $\psi_0$ ,  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$
- (2) Resolver a equação (24), obtendo  $\psi_i^1$
- (3) Atribuir como aproximação inicial  $\psi_i^{n+1} = \psi_i^n$ ,
- (4) Resolver a equação (11) até  $\psi_i^{n+1}$  convergir
- (5) Voltar a etapa 3

## 4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES

As avaliações de desempenho e dos erros do método dos volumes finitos para a solução numérica da equação de Richards foi referenciada na solução analítica de Srivastava e Yeh (1991). Tanto o desempenho computacional quanto os erros numéricos foram avaliados para nove casos simulados, em que se fizeram combinações de variação do refinamento da malha no tempo e no espaço (Tabela 1). A Figura 2 ilustra os perfis das pressões mátricas, obtidos com o método analítico de Srivastava e Yeh (1991) e com o método numérico para os casos da Tabela 1.

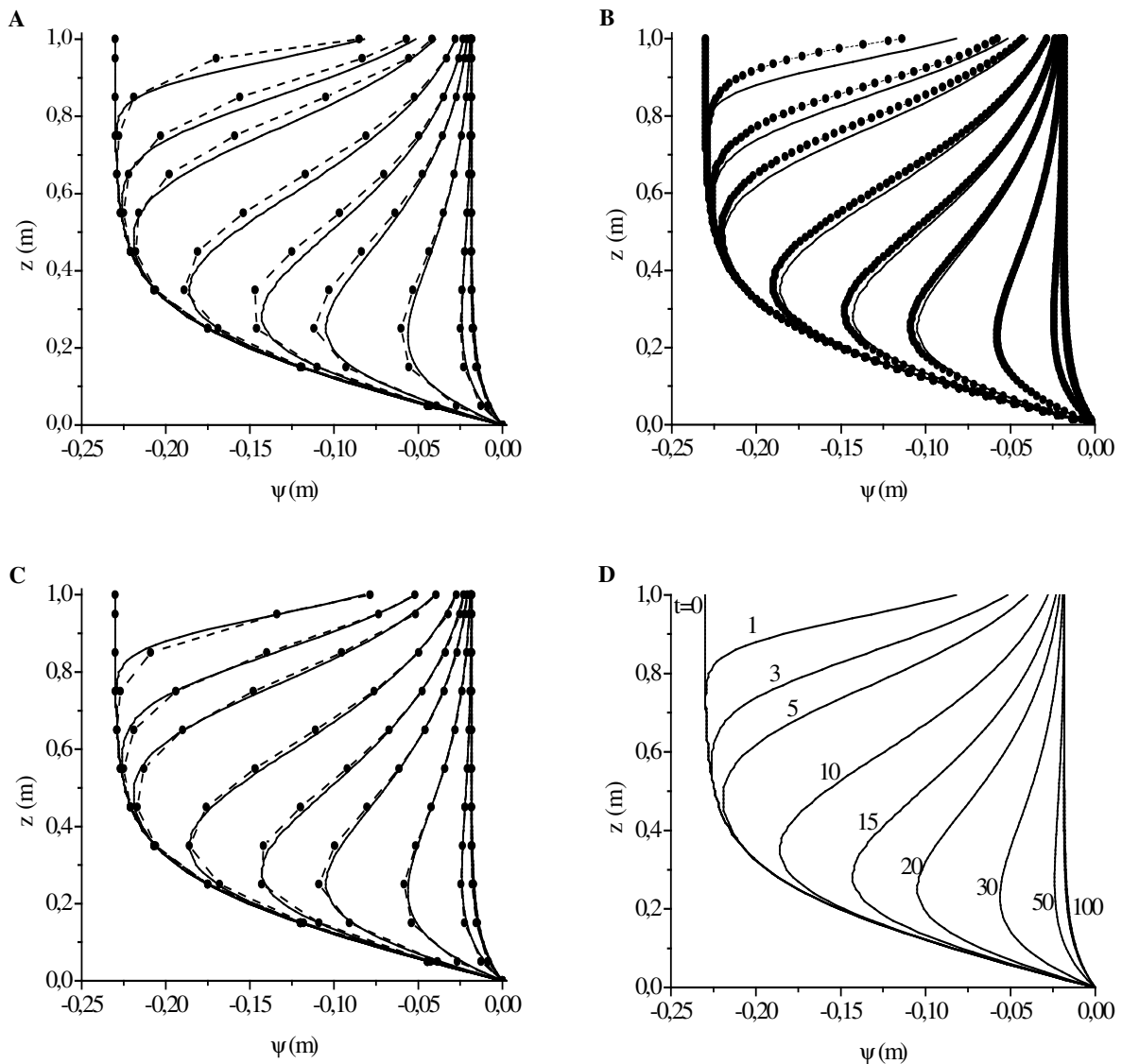


Figura 2 – Perfis das pressões mátricas: A – caso 1; B casos 2, 3 e 5; C casos 4 e 7; D casos 6, 8, e 9; ( — ) Solução Analítica; ( -●- ) Volumes Finitos

Tabela 1 – Convenção para denominar os casos simulados

		$\Delta z$ (m)		
		0,100	0,010	0,001
$\Delta t$ (hr)	1,00	1	2	3
	0,10	4	5	6
	0,01	7	8	9

Os maiores erros na simulação da pressão mátrica foram para os casos 1, 2, 3 e 5, sendo que nos três primeiros a resolução temporal foi a mais grosseira ( 1 hora) e no caso 5 as resoluções temporal e espacial foram de 0,1 hora e 0,01 m, respectivamente. Os menores erros estiveram associados à resolução temporal e espacial mais finas, correspondendo aos casos 8 e 9, com  $\Delta t=0,01$  hora, e ao caso 6 com  $\Delta t=0,10$  hora e  $\Delta z=0,001$  m.

A avaliação de desempenho da solução numérica usou dois indicadores: tempo de processamento e conservação de massa.

A avaliação dos erros usou como indicadores as diferenças entre a pressão mátrica da solução numérica e da solução analítica, e também as diferenças entre os fluxos. A variação dos erros foi analisada: de forma geral para todo o domínio da integração, no espaço, e no tempo.

#### 4.1 – Avaliação de Desempenho

O balanço de massa (BM) destes métodos numéricos é definido como a razão entre o volume de água acumulada e o fluxo líquido entre as faces do domínio. Esta definição é matematicamente representada pela equação (Celia et al., 1990):

$$BM = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^0) \Delta z}{\sum_{j=1}^{n+1} \left\{ K_{N-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_N^j - \Psi_{N-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] - K_{1/2}^j \left[ \frac{\Psi_1^j - \Psi_0^j}{\Delta z} + 1 \right] \right\} \Delta t} \quad (30)$$

A medida de balanço de massa representada pela equação (30) foi determinada para os nove casos da Tabela 1, produzindo os resultados ilustrados na Figura 3, onde t é o tempo de integração que se estende por 100 horas. A análise dos resultados indica que o balanço de massa é claramente independente do refinamento no espaço, e a conservação de massa melhora com o refinamento da grade no tempo, ou seja, se aproxima de  $BM=1$ . O erro relativo na conservação de massa é maior durante os primeiros passos de integração, de forma que se a resolução no tempo for muito grosseira, então o erro será grande durante o processo transiente.

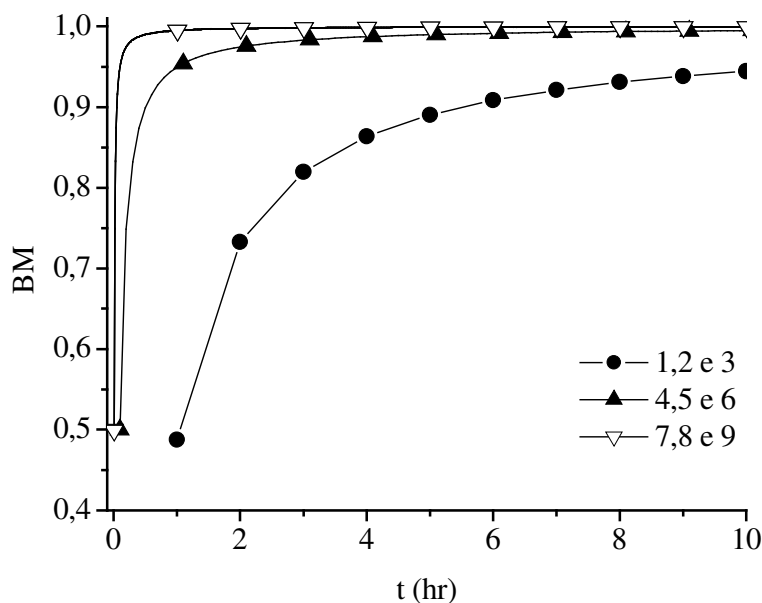


Figura 3 – Balanço de massa para os casos simulados

O segundo indicador de desempenho é o tempo de processamento que está resumido na Tabela 2 para os nove casos simulados.

Tabela 2 – Tempo de processamento para as simulações (em segundos)

		$\Delta z$ (m)		
		0,100	0,010	0,001
$\Delta t$ (hr)	1,00	0,36	21,75	213,39
	0,10	2,16	196,14	2196,76
	0,01	17,00	792,73	22194,26

Conclui-se que o refinamento da malha no tempo acarreta em aumento de acurácia no resultado numérico, em termos de conservação de massa, com tempos de processamento aceitáveis. Por exemplo, para uma grade com resolução de 100 mm, com o aumento do tempo de processamento de 0,36 s para 17 s (em função do refinamento no tempo) houve uma melhora muito significativa na conservação de massa. Mas se a resolução da grade passasse para 1 mm então o tempo de processamento aumentaria de 17 s para 6,1 horas, sem que houvesse melhora significativa na conservação de massa.

#### 4.2 – Erros Numéricos

Os erros numéricos são oriundos do método de aproximação numérica, do refinamento da malha e de procedimentos iterativos no processo de cálculo. O erro numérico foi definido pela diferença, em valor absoluto, entre a solução analítica e a solução numérica como:

$$\epsilon_i^j = |\phi_i^j - \psi_i^j| \quad (31)$$

onde  $\phi$  representa o valor da solução analítica no ponto correspondente ao tempo  $j$  e espaço  $i$ .

A Figura 4 apresenta o erro quadrático médio de toda simulação, ou erro médio quadrático global, dado pela expressão:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T (\epsilon_i^j)^2}{(N)(T)} \quad (37)$$

onde  $N$  é número total de intervalos de integração para atingir a profundidade de 1,0 m, e  $T$  é o número total de passos de integração no tempo para cobrir as 100 horas de integração.

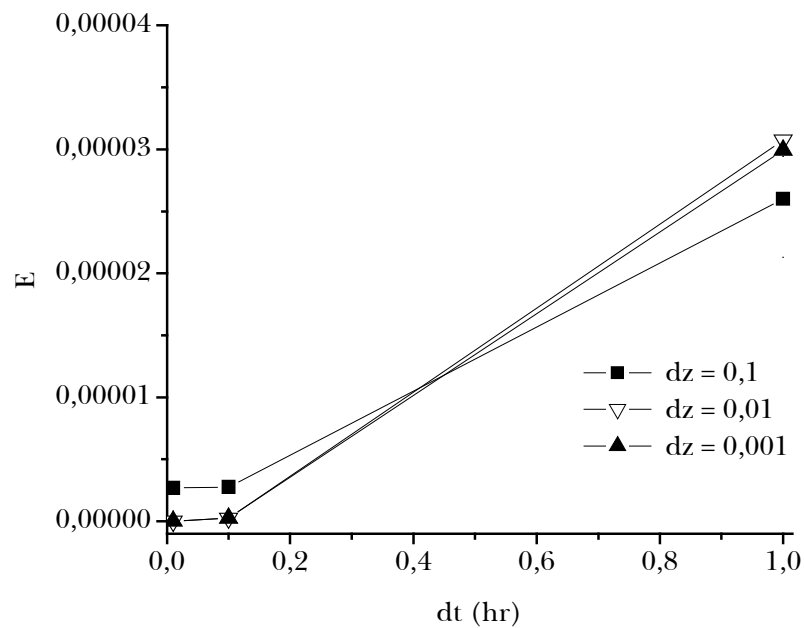


Figura 4 – Evolução dos erros gerais

As soluções numéricas pelo método dos volumes finitos com resolução temporal mais grosseira foram as que apresentaram os maiores erros médios globais, sendo da ordem de 0,5%. Para o caso 9 ( $\Delta z=0,001$  m, e  $\Delta t=0,01$  hora) o erro numérico foi nulo. Em geral, o erro global diminui com o refinamento da malha tanto no tempo quanto no espaço, com exceção do caso em que a resolução temporal foi mais grosseira (1 hora) em que o erro decresceu segundo a seqüência 2, 3 e 1. E para o caso 9 o erro é zero.

A evolução do erro ao longo do tempo de integração é ilustrada na Figura 5. O erro no tempo  $T$  foi normalizado pela solução da função analítica, sendo definido como:

$$\overline{\varepsilon}_T^j = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^j}{\sum_{i=1}^N \phi_i^j} \quad (35)$$

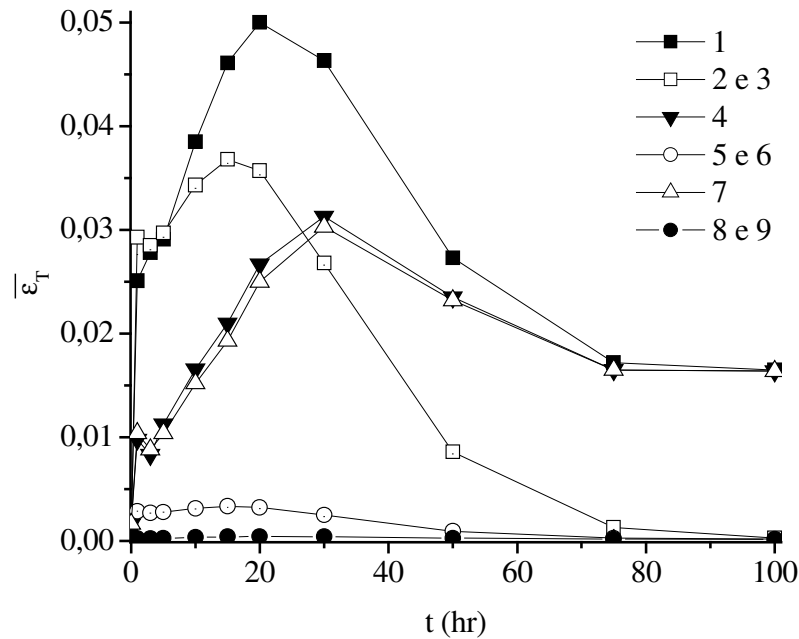


Figura 5 – Evolução dos erros ao longo da integração no tempo

O erro para o método dos volumes finitos é pequeno no tempo inicial quando a solução numérica é a estacionária; depois cresce no início do regime transiente até atingir um máximo, que depende da resolução espacial, e em seguida diminui assintoticamente até o final da integração. Para os casos 1, 4 e 7, em que a resolução espacial é grosseira, os erros foram os maiores do conjunto de casos simulados, sendo os únicos que não tenderam assintoticamente a zero. Para os casos 2 e 3 o erro foi alto no início e tendeu a zero no final da integração. Enquanto que para os casos 5, 6, 8 e 9 a evolução dos erros foram semelhantes, mantendo-se pequenos desde o início da integração.

A distribuição dos erros no espaço, ou seja, os perfis dos erros estão ilustrados na Figura 6. Os perfis dos erros foram normalizados pela solução exata, e foram determinados como sendo a média temporal do erro em cada posição:

$$\overline{\varepsilon}_{Ei} = \frac{\sum_{j=1}^T \varepsilon_i^j}{\sum_{j=1}^T \phi_i^j} \quad (36)$$

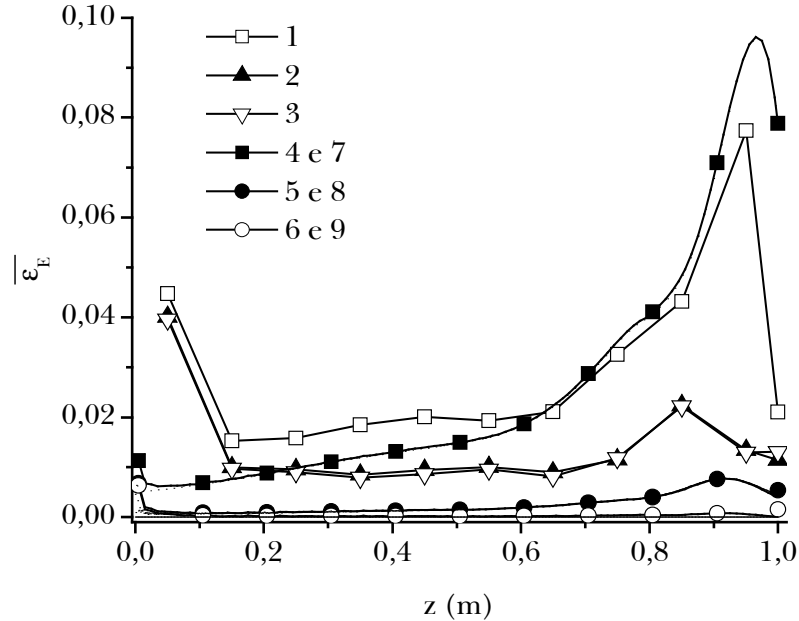


Figura 6 – Perfil dos erros

O perfil dos erros normalizados para o método dos volumes finitos é caracterizado por erros maiores nos extremos do domínio de cálculo, próximo às condições de contorno. No interior do domínio o erro é aproximadamente constante, variando pouco com a variação da resolução temporal e espacial. Para os casos em que a grade foi refinada no espaço e no tempo, de forma que conservou a massa, o erro da pressão mátrica foi menor no contorno superior do que no inferior, resultante da condição de contorno de fluxo prescrito no extremo superior.

Em engenharia, muitas vezes os maiores interesses na solução de equações diferenciais estão na análise de comportamento de variáveis secundárias. No caso da equação de Richards, a estimativa do fluxo em uma determinada elevação pode ser mais fácil de ser interpretada do que o campo de sucção mátrica em cada ponto no espaço e no tempo. Com essa justificativa, foi realizada a análise de erro dos fluxos, que é uma variável secundária em relação à estrutura da equação diferencial.

O erro quadrático médio do fluxo, em uma determinada elevação, foi calculado como sendo a diferença entre o fluxo estimado com o método numérico e o resultante da solução analítica:

$$\Delta_i^j = \frac{\sum_{j=1}^T (q_i^j - q_{ti}^j)^2}{T} \quad (38)$$

onde,  $q_t$  é o fluxo calculado pela solução analítica e  $q$  é o fluxo calculado numericamente. O fluxo  $q$  da solução numérica foi estimado com a equação (39):

$$q_i^j = K_{i-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_i^j - \Psi_{i-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] \quad (39)$$

A Figura 7 apresenta a variação do erro quadrático médio dos fluxos entre a solução analítica e a numérica em  $z=0$ , ou seja, dos fluxos que entram no lençol freático.

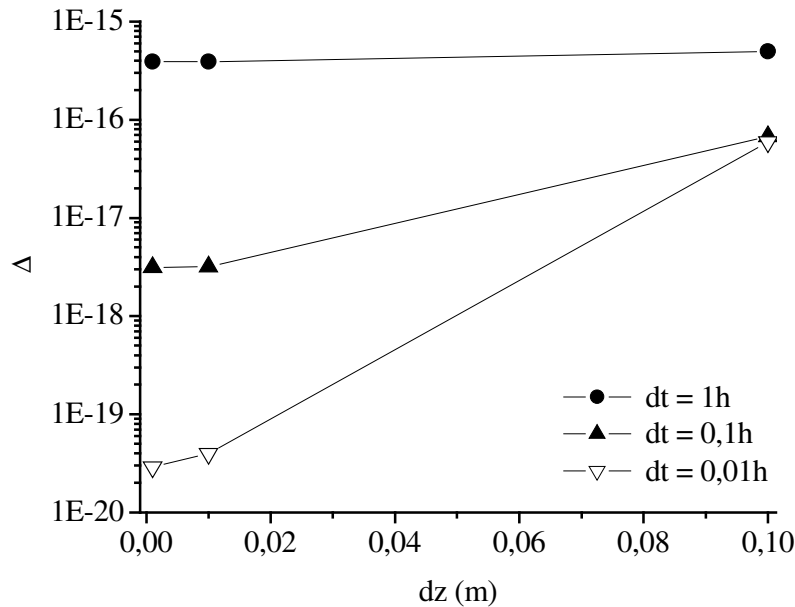


Figura 7 – Erros no cálculo do fluxo na base

Os erros do fluxo foram pequenos para o método dos volumes finitos, mesmo levando em consideração que se trata de uma medida quadrática. Os erros nos fluxos sempre diminuem com o refinamento da grade no espaço e no tempo.

## 5 – CONCLUSÕES

O método dos volumes finitos apresenta erros e desvios pequenos em relação à solução analítica inclusive com grades mais grosseiras. As maiores fontes de erro provavelmente se devem à iteratividade necessária para resolver as equações visto que a condutividade hidráulica é dependente de  $\psi$  e esta não pode ser explicitada.

A conservação de massa melhora significativamente com o refinamento da grade em relação ao tempo, sendo pouco sensível ao refinamento no espaço. O erro relativo na conservação de massa é maior durante os primeiros passos de integração, de forma que se a resolução no tempo for muito grosseira, então o erro será grande durante o processo transiente.

O tempo de processamento é bastante pequeno, mas aumenta exponencialmente ao refinamento da malha. Contudo, com um tempo aceitável de processamento em aplicações de



modelagem operacional ainda se obtêm bons resultados. O erro global do método numérico tem um comportamento bastante previsível, no qual, quanto mais refinada for a grade, menor serão os erros.

Devido ao fenômeno ser transiente, então a evolução dos erros deve ser analisada ao longo do tempo de integração, e também em termos de seu perfil ao longo da profundidade. Os erros no espaço são fortemente relacionados às proximidades dos contornos, onde tanto no nível do lençol freático (contorno inferior), quanto na superfície, são registrados os maiores erros no perfil. Os erros no tempo diminuem ao longo da integração, ou seja, quanto mais próximo do estado estacionário então menor será o erro.

Esses resultados são elementos parciais de um projeto mais amplo, cujo objetivo é de usar técnicas de perturbação e conceitos estocásticos para que a equação de Richards simule os processos no solo em escalas compatíveis com as dos modelos hidrológicos e climáticos operacionais.

## BIBLIOGRAFIA

BASHA, H. A. (2000). *Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table*. Water Resources Research, 36(9), 2567-2573.

BRAS, R.L. (1990). *Hydrology – An Introduction to Hydrologic Science*. Addison-Wesley, New York, 349-393.

CELIA, M. A.; BOULOTAS, E. F.; ZARBA, R. L. (1990). *A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation*. Water Resources Research, 26(7), 1483-1496.

CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. (1988). *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York.

CHEN, Z.-Q., KAVVAS, M.L., GOVINDARAJU, R.S. (1993). *Upscaling of Richards equation for soil moisture dynamics to be utilized in mesoscale atmospheric models*. Em: Bolle, H.-J., Feddes, R.A., & Kalma, J.D. (editores), *Exchange Processes at the Land Surface for a Range of Space and Time Scales*, IAHS Publication No. 122, 125-132.

CHEN, J-M, TAN Y-C, CHEN, C.-H., PARLANGE, J.-Y. (2001). *Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes*. Water Resources Research, 37(4), 1091-1093.

DICKINSON, R.E, HENDERSON-SELLERS, A., KENNEDY, P.J., WILSON, M.F. (1986). *Biosphere-Atmosphere Transfer Scheme (BATS) for the NCAR Community Climate Model*. NCAR Technical Note NCAR/TN-275+STR, Boulder, CO, USA, 69 pp.

DÜMENIL, L., TODINI., E., (1992). *A rainfall runoff scheme for use in the Hamburg climate model*. Em: O’Kane (editor), *Advances in Numerical Hydrology. A Tribute to James Dooge*.

European Geophysical Society Series on Hydrologic Sciences (1), Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

GARDNER, W. R. (1958). *Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table*. Soil Science, 85, 228-332.

MALISKA, C. R. (1995). *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC, 2 ed., Rio de Janeiro.

HAVERKAMP, R.; PARLANGE, J.-Y.; CUENCA, R.; ROSS, P.J.; STEENHUIS, T.S. (1998). *Scaling of the Richard's equation and its application to watershed modeling*. Em: Sposito, G. (editor), In Scale Invariance and scale dependence in Hydrology. Cambridge University Press, New York, USA, 190-223.

MENZIANI, M.; PUGNACHI, S.; VINCENZI, S. (2006). *Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions*. Journal of Hydrology, 332 (1-2), 214-225.

NARASIMHAN, T.N. (1998). *Hydraulic Characterization of aquifers, reservoir rocks, and soils: A history of ideas*. Water Resources Research, 34(1), 33-46.

RATHFELDER, K.; ABRIOLA, L. M. (1994). *Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation*. Water Resources Research, 30(9), 2579-2586.

RICHARDS, L. A. (1931). *Capillary conduction of liquids in porous mediums*. Physics, 1, 318-333.

ROSS, P. J. (1990). *Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation*. Water Resources Research, 26(2), 279-290.

ROSS, P. J.; PARLANGE, J. Y. (1994). *Comparing exact and numerical solutions of Richards equation for one-dimensional infiltration and drainage*. Soil Science, 157(6), 341-344.

SRIVASTAVA, R.; YEH, T. C. J. (1991). *Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils*. Water Resources Research, 27(5), 753-762.

VARADO, N., BRAUD, I., ROSS, P.J., HAVERKAMP, R., (2006). *Assessment of an efficient numerical solution of the 1D Richards' equation on bare soil*. Journal of Hydrology, 323, 244-257.