

CAMINHOS DE MÍNIMO CUSTO NO PROJETO DE ESTRADAS, GASODUTOS E CANAIS DE IRRIGAÇÃO

W. Collischonn¹, J. V. Pilar²

Resumo - Este trabalho apresenta a proposta de um algoritmo para a determinação do caminho de mínimo custo sobre um Modelo Numérico do Terreno, que pode ser utilizado para a otimização do traçado de um canal de irrigação, gasoduto, de um trecho de rodovia, ou estrutura linear similar entre dois pontos. As características inovadoras do algoritmo são a utilização de uma função que relaciona o custo à declividade, e a consideração da declividade local e direcional. Os dados de entrada são a topografia, na forma de um modelo numérico do terreno, uma função que relaciona o custo unitário do caminho com a declividade e com o comprimento, e a localização do início e do fim do trajeto. O algoritmo utiliza uma variante das técnicas de programação dinâmica, adaptadas para a estrutura de grade dos planos de informação de um sistema de geoprocessamento. O algoritmo foi implementado em um programa na linguagem FORTRAN que gera, como dados de saída, uma imagem de mínimo custo acumulado e uma outra imagem com a trajetória de menor custo entre os pontos de início e fim do trajeto. São apresentados testes do algoritmo utilizando função de custo e MNT hipotéticos, com resultados coerentes.

Abstract - In planning activities it is often necessary to draw preliminary paths for roads and irrigation canals between two points over a region where the topographic features are very relevant. This paths should be good approximations of the ones with the least cost from the almost infinite trajectories that are possible, and it should avoid exaggerated slopes. In the case of a canal, uphill reaches of the path should be restricted to a minimum. This paper presents a least-cost-path algorithm developed to find the best path, given the topography, the starting and ending points of the linear feature (canal or road) and a function relating slope, distance and cost. The algorithm is based on dynamic programming techniques adapted to solve problems on a grid, or raster structure, that is usually used by Geographical Information Systems. We implemented the algorithm in a computer program and applied it to solve a hypothetical problem. The result showed the capability of the algorithm, although not real cost functions were used. The algorithm will be easily extended to include other variables, such as land use, vegetation and geology to generate a cost function.

Palavras-chave: SIG, otimização, canais

¹ Instituto de Pesquisas Hidráulicas - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Caixa Postal 15029 - CEP 91501-970 - Porto Alegre RS, Brasil
e-mail: collschonn@vortex.ufrgs.br ; Fone: 55 051 316 6325

² e-mail: jpilar@if.ufrgs.br

INTRODUÇÃO

Caminhos de mínimo custo tem sido estudados de maneira separada por especialistas em Pesquisa Operacional e por especialistas em GIS.

Sob o ponto de vista dos especialistas em Pesquisa Operacional, o problema consiste em encontrar o caminho de mínimo custo, dada uma rede de pontos e de arcos unindo estes pontos e dados os custos associados a cada arco. A abordagem deste tipo de problema é normalmente feita utilizando técnicas de programação dinâmica.

A programação dinâmica é um método especial de otimização, adaptado aos problemas de múltiplas etapas (Ventsel, 1982). Uma etapa se define como a parte do problema que possui um conjunto de alternativas mutuamente excludentes e que caracterizam o estado desta etapa. O estado reflete a condição das restrições que vinculam as etapas.

A forma em que a programação dinâmica é normalmente resolvida consiste em procurar a direção ótima "passo a passo", levando em consideração as conseqüências futuras de cada decisão (Taha, 1995). Ou seja, a decisão na etapa "i" não procura apenas ser a melhor para essa etapa, senão para todas as restantes, incluindo a própria etapa "i". Isto é feito: 1) analisando o problema desde o fim até o início, acumulando o custo obtido; e 2) associando as melhores decisões de cada etapa desde o início até o fim, conformando a rota de "menor custo acumulado".

Então, o problema de programação dinâmica é caracterizado por um espaço de decisão de duas dimensões: etapas-estados, sobre o qual fica configurada uma grade de pontos interligados por arcos que representam a factibilidade dessa decisão e o seu correspondente custo.

Mas existem problemas onde os pontos correspondem a um espaço geográfico e os arcos representando custos podem ser expressos através de uma "função de custo incremental" entre os pontos. Estes são problemas que podem ser abordados com técnicas SIG.

Funções para traçar caminhos de mínimo custo foram incorporados em programas comerciais de SIG há bastante tempo (Eastman, 1995). Num SIG baseado em vetores, por exemplo com linhas representando ruas, a aplicação das técnicas de programação dinâmica pode ser direta, bastando uma interface que prepare os dados geo-referenciados para a solução em um módulo de programação dinâmica. No caso de um SIG baseado em grades de dados as técnicas de programação dinâmica são aplicadas de maneira indireta. Douglas (1994) apresenta uma descrição genérica destes algoritmos.

De forma semelhante à programação dinâmica, os algoritmos de caminho de mínimo custo separam o problema em duas partes (Stefanakis e Kavouras, 1995): 1) calcular um plano de custo acumulado até o fim do caminho a partir de um plano de custo de passagem e 2) percorrer o plano de custo acumulado de um ponto de início até o ponto final do caminho

Na aplicação de funções para o cálculo de caminhos de mínimo custo sobre mapas em formato de grade, tem sido dada ênfase ao problema em que se combina um grande número de variáveis para gerar o plano de custo de passagem (Lee e Stucky, 1998; Eastman, 1995). A combinação de um grande número de variáveis é um aspecto de

importância prática e permite utilizar o potencial único de um SIG, mas é freqüentemente utilizada para mascarar alguns pontos fracos dos algoritmos utilizados. Douglas (1994) mostra que os algoritmos de caminhos de mínimo custo tradicionais não tem bons resultados quando o plano de custo de passagem é homogêneo.

Outro ponto fraco mascarado pelo uso de um grande número de variáveis é que o custo de passagem é independente da direção e do sentido do caminho. Na realidade, o custo de passagem deve ser diferente de acordo com a direção seguida, caso a declividade seja um fator importante no custo de passagem. Se, por exemplo, o problema é escoar água, descer é mais fácil do que subir.

Ao contrário da declividade local, que é a declividade na direção normal às curvas de nível e é uma só para cada posição no plano, a declividade direcional de um caminho, em um ponto qualquer no plano, depende da direção e do sentido em que segue o caminho.

Neste trabalho é apresentado um algoritmo de caminho de mínimo custo em que a declividade, como função do espaço e da direção, é utilizada implicitamente como plano de custo de passagem. É evidente a utilidade do algoritmo no planejamento de canais de irrigação e rodovias. Nestas obras normalmente é dada preferência a traçados que, embora mais longos, sejam menos íngremes, tanto pelos custos de construção como pela dificuldade de operação e uso.

O ALGORITMO

Duas definições são fundamentais para explicar o algoritmo: o custo acumulado e o custo incremental. O custo incremental é o custo de construção ou operação do caminho entre duas células vizinhas. O custo acumulado de uma célula é o menor custo daquela célula até a célula que define o final do caminho.

O custo incremental é função da distância e da declividade entre os centros de duas células vizinhas que estão sendo consideradas. A forma da função de custo x declividade de canais pode ser imaginada como semelhante à função da figura 1. Existe uma declividade em que o custo é mínimo. Esta declividade pode ser chamada a declividade ideal, ou S_{min} . Para declividades que se afastam deste valor, maiores ou menores, o custo aumenta. A função pode ser contínua ou não, e pode ser assimétrica, como no caso de um canal de irrigação, porque a declividade negativa implica em bombeamento e deve ser penalizada com um custo maior.

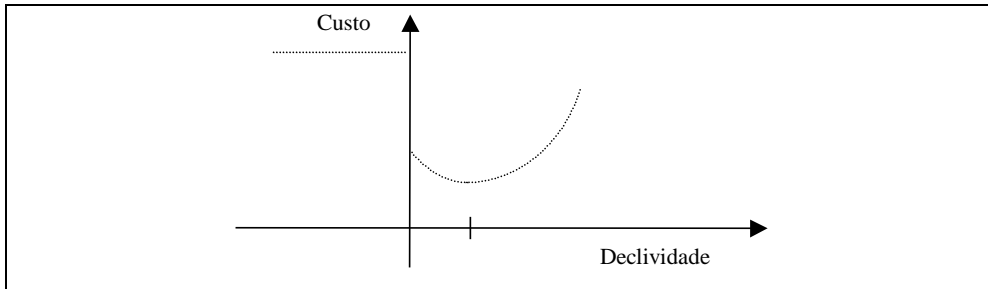


Figura 1: Forma geral da função Custo x Declividade para um canal de irrigação.

Na realidade, a função de custo utilizada é um polinômio, que tem um termo correspondente ao comprimento do caminho, além de aquele correspondente à declividade, e pode ter termos associados a outras variáveis que contribuem para o custo, embora não dependam da direção e do sentido do caminho, como o uso do solo, a cobertura vegetal, o tipo de solo e a geologia.

A declividade é sempre calculada entre duas células vizinhas, e é expressa simplesmente como a diferença de cotas entre elas dividida pela distância sobre o plano.

Todo o processo de atribuição de custo é feito célula por célula, para toda a área abrangida pelo MNT. Uma janela móvel de 3 x 3 células percorre toda a área do MNT identificando células cujo custo já foi calculado, células cujo custo acumulado foi alterado na iteração anterior e células cujo custo acumulado ainda não foi calculado. A figura 2a apresenta esta janela, de 3 x 3 células, onde as células estão marcadas com números para sua identificação. O custo acumulado da célula central (CA_5) é calculado pela soma do custo acumulado de uma célula vizinha à central com o custo incremental de construção entre a central e a vizinha.

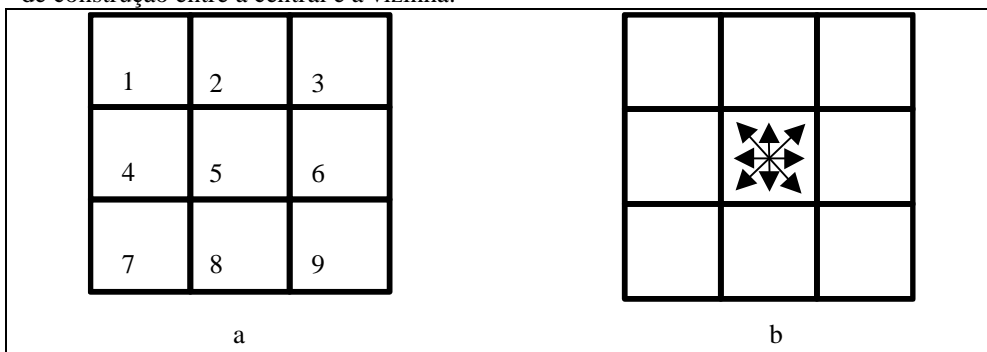


Figura 2: a) Janela de 3 x 3 células sobre a qual é realizado o processo de cálculo de custo e b) as oito direções que um canal pode seguir a partir da célula central.

Como exemplo, o custo acumulado na célula 5, supondo que o canal siga da célula 5 para a célula 6, é dado pela expressão:

$$CA_5 = CA_6 + CI_{5-6}$$

onde CA_5 é o custo acumulado na célula 5, CA_6 é o custo acumulado na célula 6 e CI_{5-6} é o custo incremental entre as células 5 e 6, que depende da declividade, como já se viu.

Este algoritmo é semelhante a um algoritmo de programação dinâmica em que o diagrama de caminhos possíveis não está completamente definido quando se inicia a busca. Para esta abordagem de otimização dinâmica sobre os dados espaciais basta saber que o caminho a seguir a partir de uma célula qualquer levará necessariamente a uma das 8 células vizinhas, como mostra a figura 2b.

O algoritmo busca determinar, de forma iterativa, o valor de mínimo custo acumulado até o ponto que define o fim do canal, para todas as células de uma grade de dimensões idênticas ao MNT.

O custo acumulado é calculado pela soma do custo acumulado de uma célula vizinha à central com o custo de construção entre a central e a vizinha. O custo acumulado de uma célula é o menor custo de construção de um canal daquela célula até a célula que define o final do canal.

A medida que a distância do final do canal aumenta, novos caminhos factíveis vão sendo identificados, e o custo acumulado de uma célula deve ser repetidamente revisado. A necessidade de um procedimento iterativo decorre do fato que os caminhos possíveis não são conhecidos a priori, mas vão sendo identificados a medida que o procedimento avança.

Uma janela de 3 células de largura por 3 células de altura percorre as imagens de custo acumulado até encontrar uma célula cuja vizinha (qualquer célula da periferia na janela 3x3) teve o custo acumulado alterado na iteração anterior.

A recente alteração do custo acumulado em uma célula vizinha alerta para a necessidade de revisar o custo acumulado da célula central. Neste caso duas situações são possíveis:

1. A célula central ainda não teve seu custo acumulado calculado, (porque não havia ainda nenhuma célula vizinha com o custo acumulado já definido na iteração anterior) e é necessário calcular o custo acumulado
2. A célula central já teve seu custo acumulado calculado, mas uma das vizinhas teve seu custo alterado na iteração anterior e é necessário revisar o custo acumulado da célula central

Em qualquer caso a direção de menor custo, a partir da célula central pode ser qualquer uma das oito direções definidas na figura 2.

Algumas células vizinhas à célula central podem não estar com o custo acumulado definido na iteração atual, neste caso a direção de um possível caminho que indica para esta célula não pode ainda ser avaliada como uma candidata à direção de menor custo acumulado, e não é considerada na análise do menor custo. Isto acontece, por exemplo, na primeira iteração.

Como exemplo se apresenta a figura 3, na qual, na iteração k (que vem a ser a iteração 2), a janela móvel se aproxima à célula que define o final do canal (célula preta), e chega à

borda de uma região formada por células cujo custo acumulado já foi calculado numa iteração anterior (células acinzentadas). As células brancas na figura 3 ainda não tiveram o seu custo acumulado definido.

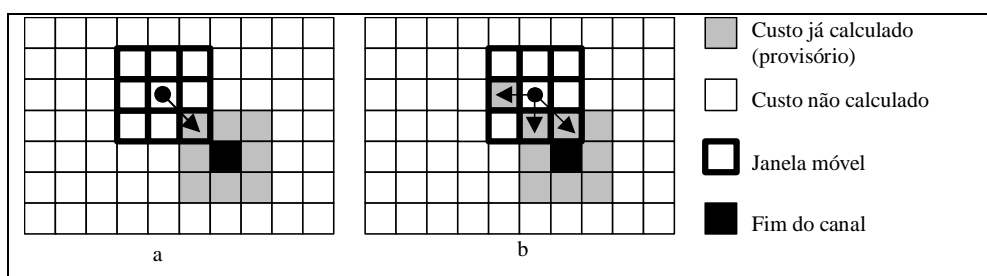


Figura 3: Definição dos caminhos cujo custo deve ser avaliado, enquanto a janela móvel avança.

Na posição da janela móvel apresentada na figura 3a, o único caminho possível que pode ser avaliado na janela móvel é na direção diagonal para a direita embaixo, como mostra a seta. O caminho escolhido para o canal, a partir da célula central da janela móvel é obrigatoriamente na direção diagonal para a direita embaixo. O custo acumulado a ser atribuído à célula central da janela móvel é o resultado da soma do custo acumulado da célula 9, mais o custo incremental entre as células 5 e 9 (que é diferente do custo incremental entre 9 e 5).

Na posição da janela móvel apresentada na figura 3b, após avançar uma coluna, já existem três caminhos possíveis para o traçado do canal, incluindo a direção da célula horizontal à esquerda da célula central, cujo custo acumulado foi o último recentemente calculado. O algoritmo escolhe a melhor das duas opções que é a opção que resulta no menor custo acumulado da célula central da janela para a célula que define o final do canal (célula preta).

Ao final da iteração k a região formada pelas células com o custo acumulado (provisório) já calculado cresceu em todas as direções, assumindo a nova configuração apresentada na figura 4. Entretanto os valores dos custos acumulados já definidos estão sujeitos a modificações. A alteração do custo acumulado em uma célula vizinha, na iteração $k-1$, alerta para a necessidade de revisar o custo acumulado da célula central na iteração k . Como a janela móvel percorre toda a região, todas as células, com exceção das linhas e colunas das bordas externas, são analisadas como célula central da janela móvel uma vez a cada iteração.

O processo de atribuição de custos acumulados encerra quando, de uma iteração para a outra, nenhuma célula sofreu alteração de custo acumulado. Esta situação significa que cada célula já teve seu custo acumulado ótimo definido.

Além do custo acumulado, é armazenado em um arquivo, um código que indica a direção da trajetória ótima. Este arquivo é percorrido da célula que indica o início do canal até aquela que indica o final do canal, marcando a trajetória ótima em outro arquivo.

A técnica iterativa e a repetida revisão do custo acumulado quando ocorrem mudanças na vizinhança de uma célula, permitem ao algoritmo a descoberta de complexas trajetórias.

Douglas (1994) chama atenção para o erro em admitir apenas oito direções possíveis para cada célula. O algoritmo implementado também apresenta este erro, pois as curvas de "isocusto", em planos de declividade uniforme são octógonos e não circunferências. Porém, espera-se que em planos de custo mais irregulares ou heterogêneos a influência deste erro seja minimizada.

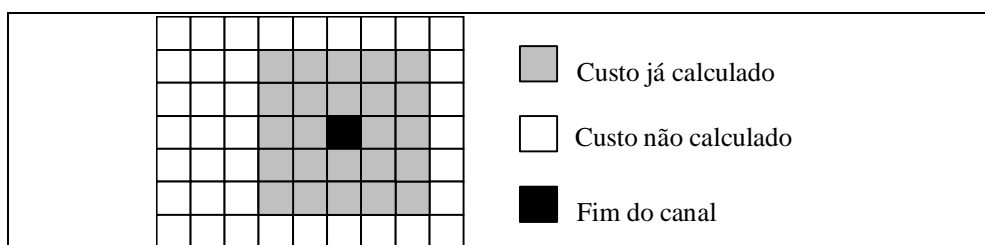


Figura 4: Região de células com o custo acumulado definido ao final da iteração k.

APLICAÇÕES

O programa com o algoritmo implementado foi testado sobre dois MNTs hipotéticos, representando aplicações potenciais no traçado de canais de irrigação e de rodovias.

A primeira aplicação é um caso hipotético de otimização do traçado de um canal de irrigação entre dois pontos, sobre um MNT com vales e montanhas. A função de custo utilizada procurou penalizar a declividade negativa com valores de custo muito altos. As posições de início e final do canal foram escolhidas de forma a testar a capacidade do algoritmo de contornar obstáculos.

A figura 5 apresenta o MNT utilizado como base, os pontos de início e fim e o traçado ótimo encontrado. Os tons mais claros indicam cotas mais altas, e os tons mais escuros cotas mais baixas.

A trajetória de menor custo encontrada contorna a região alta (zona clara) que existe entre os dois pontos e atinge o ponto final entrando no vale em que este se encontra de forma gradual. Desta forma foram evitadas as declividades negativas e as declividades positivas muito acentuadas.

A segunda aplicação foi realizada sobre um MNT artificial, na forma de um morro cônico. A função de custo x declividade utilizada nesta aplicação tem um mínimo em uma declividade menor do que a declividade do morro, e uma forma tal que exige que o caminho escolhido suba o morro em espiral, ao longo de uma trajetória mais longa mas de menor declividade.

O resultado da segunda aplicação é apresentado na figura 6, onde as cores claras indicam cotas mais altas no morro. A trajetória calculada sobe o morro ao longo de uma trajetória espiral, com um ponto de inflexão. Este ponto de inflexão poderia ser evitado caso o algoritmo levasse em conta algo como "um custo adicional para curvas fechadas".

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Os testes mostram que o algoritmo é versátil na busca de caminhos de mínimo custo que podem ser úteis na fase de planejamento de canais de irrigação, gasodutos, estradas e outras estruturas lineares. Os caminhos encontrados nos dois testes demonstram a capacidade do algoritmo de contornar obstáculos do relevo e de encontrar caminhos que respeitam as restrições da função de custo.

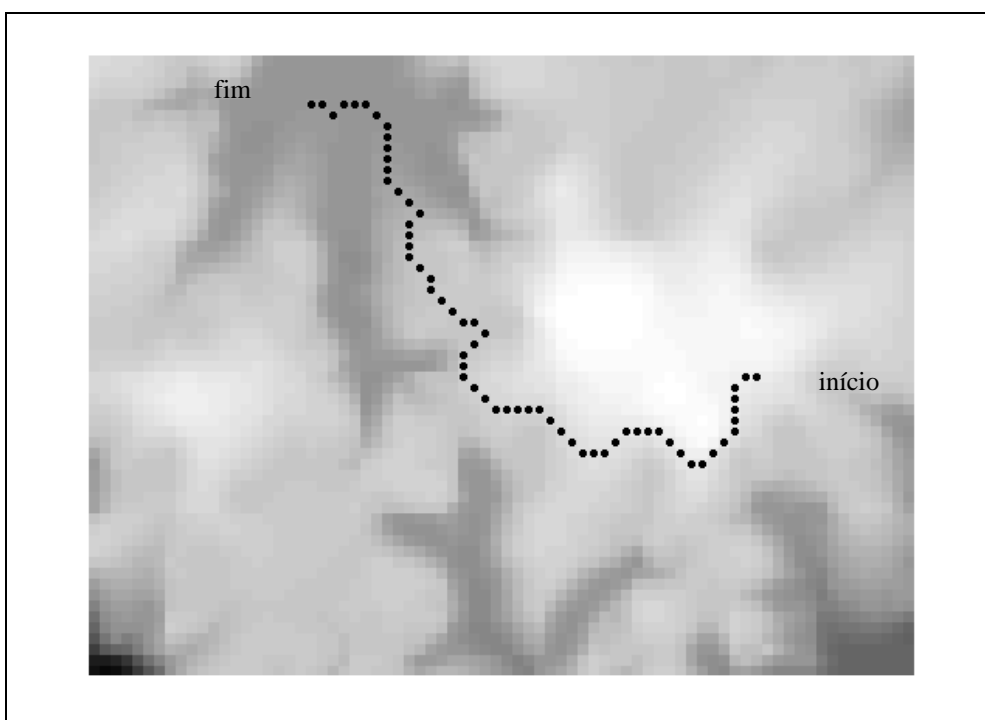


Figura 5: Trajetória ótima do canal de irrigação.

Nos dois exemplos as funções que relacionam o custo à declividade são hipotéticas, não estão baseadas em dados reais de custo de canais. O MNT utilizado como base também é hipotético.

Não foi avaliada a influência da escala espacial sobre os resultados. É possível que a utilização de células menores, em uma discretização mais densa do terreno, conduza a resultados um pouco diferentes. É preciso adequar a discretização em células com o comprimento típico de trechos de canal.

O algoritmo é inovador porque utiliza uma função que relaciona o custo à declividade e, principalmente, porque este custo depende da direção e do sentido do caminho.

O algoritmo está baseado em trajetórias que podem seguir apenas oito direções sendo, portanto, um algoritmo de programação dinâmica de redes, e não um algoritmo de caminho de mínimo custo sobre um plano. Caso o MNT seja muito homogêneo o algoritmo vai encontrar falsos caminhos de mínimo custo, como mostra o trabalho de Douglas (1994).

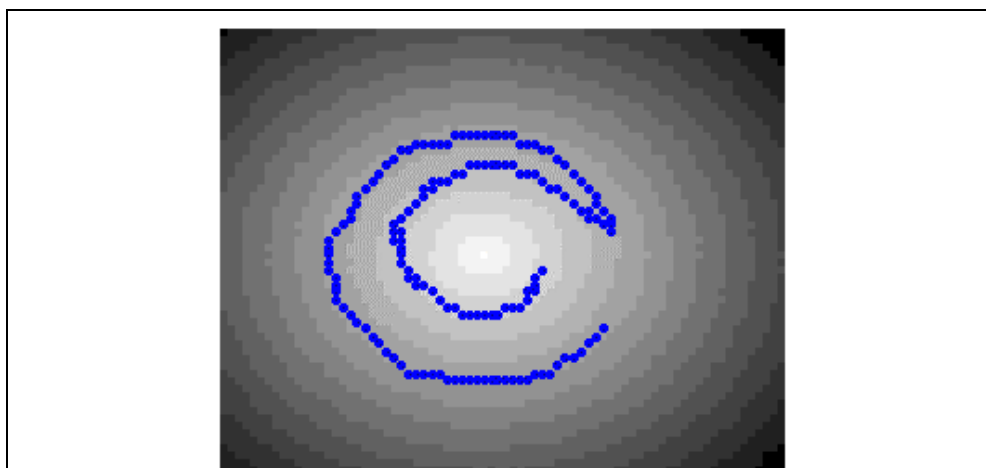


Figura 6: Trajetória ótima para um caminho com declividade limitada.

Agradecimentos

Aos profs. Alfonso Risso, Carlos André Mendes e Fernando Meirelles, pelos comentários; aos prof. David Douglas e Emmanuel Stefanakis, respectivamente das Universidades de Ottawa e Atenas, por colocarem seus artigos à disposição; e ao CNPq pela bolsa de pesquisa que sustenta um dos autores.

Referências bibliográficas

- Douglas, D. H. 1994 Least cost path in GIS using na accumulated cost surface and slope lines. *Cartographica* Vol. 31, No. 3; pp. 37-51.
Eastman, J. R. 1995 Idrisi for Windows users guide. Clark University. Worcester.

- Lee, J.; Stucky, D. 1998 On applying viewshed analysis for determining least-cost paths on Digital Elevation Models. *International Journal of Geographical Information Science*. Vol. 12, N. 8, 891-905.
- Stefanakis, E.; Kavouras, M. 1995 On the determination of the optimum path in space. *Proceedings of the European Conference on Spatial Information Theory, COSIT 95*, Semmering, Austria. Springer-Verlag.
- Taha, H.A. 1995. *Investigación de operaciones*. 5.ed. México. Alfaomega. 960 p.
- Venttsel, E.S. 1983. *Investigación de operaciones: problemas, principios, metodología*. Moscú: MIR. 280 p.