

OTIMIZAÇÃO DE REDES MALHADAS ABASTECIDAS COM MÚLTIPLOS RESERVATÓRIOS

Klebber T. M. Formiga¹ e Heber Pimentel Gomes²

Resumo - A complexidade do dimensionamento de redes malhadas, com o crescente avanço da micro-informática tem levado vários pesquisadores a utilizarem técnicas de otimização econômica, com o objetivo de alcançar a solução de custo mínimo do sistema de abastecimento. Esses métodos de otimização estão, pouco a pouco, substituindo os métodos tradicionais, do qual o mais conhecido é o de Hardy-Cross, que executa apenas o balanceamento da rede, sem levar em consideração a obtenção de uma solução de custo mínimo. Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização econômica de redes malhadas, abastecidas por mais de um reservatório, com a utilização de técnicas de Programação Não-Linear. Para a aplicação do método, foi utilizada uma rede malhada, abastecidas por dois reservatórios: um de montante e um de jusante. A solução do dimensionamento da rede, através do método da Programação Não-Linear, foi obtida com a utilização do algoritmo GRG2, baseado na técnica dos Gradientes Reduzidos Generalizados. Os resultados alcançados demonstraram que a metodologia proposta permitiram o dimensionamento da rede malhada, com a obtenção do mínimo custo de investimento.

Abstract- In the recent years, the designing of looped network systems has been calculated with the use of optimization techniques, with the objective of obtaining the minimal cost for the design of water supplying systems. Such methods are progressively replacing the traditional ones, of which, the Hardy-Cross is well known that calculates the looped network without taking into consideration economical criteria for the optimization. This paper presents a methodology for minimizing the cost involved in a design of a looped network, supplied by multiple reservoirs, which uses a non-linear programming technique. The methodology was applied to a system with two reservoirs, one upstream and another downstream the network. The solution for the minimal cost was obtained using the GRG2 algorithm which is based upon the Reduced Generalized Gradients. The results show that the proposed methodology was capable to design the looped network with minimal cost.

Palavras-chave- otimização, redes malhadas, programação não-linear.

¹ Engenheiro Civil, Mestre em Recursos Hídricos, AERH/DEC/CCT/UFPB, Campus II, 58109-970, Campina Grande-PB. e-mail: klebber@zaz.com.br

² Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Civil, CCT/UFPB, Campus II, 58109-970, Campina Grande-PB e-mail: heber@equipenet.com.br

INTRODUÇÃO

Das partes que compõem os sistemas de abastecimento de água, as redes malhadas de distribuição são, sem dúvida, as mais laboriosas para se fazer o dimensionamento. Isso é ocasionado pela grande quantidade de condutos e derivações que estas redes possuem. Por causa disso, tornou-se necessário a introdução de diversas simplificações, já que, até alguns anos atrás não se podia contar com o auxílio dos computadores para a realização dos cálculos. Entretanto, dado ao aumento da capacidade de cálculo dos computadores modernos, bem como a facilidade que há nos nossos dias em se trabalhar com ferramentas computacionais, tornou necessário a implementação do dimensionamento das redes de distribuição através do computador. Assim sendo, além da determinação das vazões e dos diâmetros das tubulações para os trechos, que garantissem a obediência das leis físicas do escoamento dos líquidos, pode-se introduzir ao dimensionamento outros critérios, como a minimização dos custos - de investimento e de operação do sistema

O dimensionamento das redes de distribuição compreende a determinação do diâmetro ou diâmetros de cada trecho da rede, das vazões transportadas nos trechos, e das cotas piezométricas em cada nó (incluindo o nó de cabeceira), de modo que se atenda às demandas de vazão e pressão em cada ponto de consumo. Este dimensionamento é hidraulicamente indeterminado, devido a que existem mais incógnitas a determinar do que equações hidráulicas disponíveis

Os métodos de dimensionamento tradicionais, levam em conta apenas o balanceamento hidráulico da rede, de forma a atender às condições impostas pelas equações da conservação de massa nos nós e conservação de energia nos anéis. Não se pode negar a importância desses métodos, onde se destaca o método de Hardy Cross, para a evolução da busca por um melhor dimensionamento dos sistemas de distribuição de água. Entretanto, com as ferramentas hoje disponíveis, principalmente a capacidade de resolução numérica do computador e seus programas, torna-se incompreensível a não introdução, explícita, de outros critérios ao dimensionamento das redes que compõem esses sistemas. Para a resolução desses problemas, vários pesquisadores lançaram mão de ferramentas matemáticas, baseadas na área da pesquisa operacional.

Existe hoje uma grande quantidade de artigos e livros publicados que estão relacionados à otimização de redes (Lansley e Mays 1989). Vários pesquisadores têm empregado as mais diversas ferramentas matemáticas de otimização para a solução desse problema, dentre as quais pode-se citar: a Programação Linear, a Programação Não linear, a Programação Dinâmica e o Algoritmo Genético.

A preocupação com a economia no dimensionamento de sistemas de abastecimento de água surgiu nos anos 40, quando houve uma aceleração no processo de urbanização (Hamberg e Shamir, 1988). Na década de sessenta, com a consolidação do uso de computadores, nos centros de pesquisas e nas universidades, ocorreu o

desenvolvimento de aplicações das técnicas de otimização matemática a problemas práticos como: alocação de recursos na indústria, planejamento de rotas de transportes, etc. Com isso, surgiram as primeiras idéias sobre a aplicação de técnicas de simulação e otimização no dimensionamento de redes de abastecimento de água. No entanto, foi somente no final da década de 60, e início dos anos 70, que ocorreu o surgimento de métodos mais elaborados para a otimização de redes de abastecimento. Esses métodos eram baseados em técnicas heurísticas de busca, ou no emprego da Programação Linear e da Programação Dinâmica (Walski et al., 1987).

A década de oitenta foi caracterizada pela consolidação das metodologias existentes (Santana e Soares 1997). Na conferência “Computer in Water Resources”, realizada na cidade de Nova Iorque em 1985, ocorreu uma série de seções denominadas “*The Battle of the Networks Models*” (A Batalha dos Modelos de Redes). Nesse encontro, diversos grupos de pesquisa apresentaram suas soluções para uma rede hipotética previamente estabelecida. Uma análise dos resultados obtidos pelas diferentes metodologias e algoritmos empregados foi feita por Walski et al. (1987), onde se verificou que as diferentes soluções otimizadas apresentavam uma diferença de aproximadamente 10% entre a de menor e a de maior custo.

A maioria dos métodos de otimização de redes de distribuição, levam em consideração que o abastecimento dessas é feito apenas por uma fonte, isso é verdadeiro quando se trata do abastecimento de pequenas localidades. No entanto, na prática, a quantidade de reservatórios de distribuição que irá abastecer a rede aumentará com o tamanho da cidade. Assim, ocorre uma inviabilidade na aplicação da maioria dos métodos de otimização até então desenvolvidos, para o dimensionamento de redes de abastecimento de cidades de porte médio ou grande.

Devido ao fato de a maioria das cidades de médio e grande porte já possuem os seus sistemas de abastecimento implantados, o dimensionamento completo de uma rede de distribuição nos dias atuais é bastante raro. Entretanto, esses sistemas sofrem constantemente ampliações. Essas ampliações são feitas de modo a atender o aumento de demanda, provocado pelo aumento da população nas cidades. Outro tipo de ampliação frequente, é o reforço (ou substituição) de parte (ou de todo) um sistema de abastecimento já existente, que devido a ação do tempo nas tubulações, não é mais capaz de atender satisfatoriamente as pressões de serviço para o qual foi dimensionado.

METODOLOGIA

Na maioria dos casos, os sistemas de abastecimento de água das cidades de médio e grande porte tem suas demandas supridas por mais de uma fonte. As redes desses sistemas são, geralmente, dimensionadas com base nas máximas demandas, horárias e de combate à incêndios, onde as necessidades de água são supridas pela ação conjunta, ao mesmo tempo, de todas as fontes de abastecimento. No entanto, é necessário considerar também, neste tipo de dimensionamento, o período de vazões mínimas, que ocorre geralmente à noite. Esse procedimento deve ser adotado especialmente quando se tem reservatórios de armazenamento dentro da rede, pois é à noite, principalmente na

madrugada, que ocorre o enchimento desses reservatórios, modificando assim o fluxo de água na rede.

No caso do dimensionamento ótimo de redes considerando critérios econômicos, a consideração dos períodos de demanda mínima é de crucial importância para o bom funcionamento da rede. Segundo Formiga e Gomes (1998), no processo de otimização econômica de uma rede malhada, esta tende a ser transformada em uma rede ramificada, que possui um custo menor do que uma rede malhada de mesmo porte. Com isso, a rede atenderia as máximas demandas, entretanto não haveria garantia de que a vazão necessária para o enchimento do reservatório de jusante seria atendida quando a exigência sobre o sistema diminuisse. Desta forma, o problema do dimensionamento de redes abastecidas por múltiplas fontes apresentará, pelo menos, duas condições de contorno.

Neste trabalho, foi aplicada uma metodologia semelhante à proposta por Formiga (1999). Esta metodologia baseada em técnicas de Programação Não-Linear, efetua a otimização de uma rede malhada em duas etapas: na primeira etapa, é realizado um pré-dimensionamento, em que, são considerados como variáveis de decisão, os diâmetros dos tubos. Em seguida, com os resultados obtidos a partir do pré-dimensionamento, é feito o ajuste da solução inicialmente obtida. Nesta segunda etapa o diâmetro contínuo, calculado inicialmente para um determinado trecho, é desdobrado em dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente inferior, considerando como variáveis de decisão os comprimentos de seus sub-trechos, pertencentes ao trecho considerado. Utilizando-se este artifício é possível, além de diminuir o número de variáveis de decisão para a problema, encontrar valores iniciais bastante próximos do ótimo para a segunda etapa, já que nesta, o ponto de partida para se fazer a otimização é uma solução ótima já obtida. Além dos diâmetros e dos comprimentos dos tubos, as vazões nos trechos também são consideradas como variáveis de decisão, tanto na primeira como na segunda etapa do método (Formiga, 1999).

Para o dimensionamento da rede, foi considerado como fixa a cota de cabeceira do reservatório de montante, ou seja, aquele que armazena a água vinda da captação e a distribui para a rede, onde estão localizados um ou mais reservatório de sobra (ou de jusante). Este é um caso típico que ocorre quando a rede é construída a partir de um reservatório de distribuição já existente; ou quando o sistema puder ser abastecido exclusivamente por gravidade. Esse tipo de sistema é característico dos locais em que a fonte de abastecimento está a uma cota suficientemente maior do que o setor a ser abastecido.

1ª Etapa

Na primeira fase, a *função objetivo* a ser minimizada será:

$$C(D_i, Q^1, Q^2) = \sum_{i=1}^m L_i P(D_i) \quad (1)$$

onde:

$C(D_i, Q_i^1, Q_i^2)$ é o custo da rede, em função dos diâmetros e das vazões nos seus trechos, para as duas situações de projeto (duas condições de contorno);

L_i é o comprimento do trecho i ;

$P(D_i)$ é a função que relaciona o preço do tubo com o diâmetro;

m é o número de trechos da rede.

A função objetivo está sujeita a seis conjuntos de restrições, que são derivadas do tipo de problema do dimensionamento de redes em questão e da peculiaridade do modelo da programação não linear. Estes conjuntos de restrições são aplicados para as duas condições de contorno, ou seja, as máximas e mínimas demandas horárias.

1. Pressões mínimas nos nós:

Para as duas condições de contorno, as pressões nos nós da rede não devem ser inferiores às requeridas (Z_k), de modo a garantir o abastecimento, com qualidade, ao usuário final:

$$Z - \sum_{c=1}^k J_c \geq Z_k \quad (2)$$

Z é a cota de cabeceira na rede;

Z_k é a cota piezométrica requerida no nó k e;

$\sum J_c$ é a soma das perdas de carga nos trechos pertencentes ao percurso compreendido entre o reservatório de distribuição (seja o de cabeceira ou o de sobra) e o nó k .

2. Diâmetros mínimos e máximos:

Os diâmetros D_i devem ser maiores que um diâmetro mínimo (D_{\min}) adotado e menores que um diâmetro máximo estimado (D_{\max}). Como os diâmetros serão iguais para as duas condições de contorno, esta restrição só é apresentada uma vez, valendo assim para todas as condições de contorno.

$$D_{\min} \leq D_i \leq D_{\max} \quad (3)$$

3. Conservação de energia no anel:

$$\sum_{i=1}^{z_k} J_i - \sum_{j=1}^{p_k} Ep_j = 0 \quad (4)$$

em que:

J_i a perda de carga no trecho i ;

z_k o número de trechos no anel k em questão e;

Ep_i a energia de impulsão aplicada na malha ou anel. Na falta de uma fonte externa dessa energia no interior do anel, o valor de $\square Ep$ será nulo.

p_k o número de fontes de energia de impulsão dentro do anel k .

4. Continuidade nos nós:

$$\sum_{i=1}^{k_n} Q_{entra_i} - \sum_{j=1}^{q_n} Q_{sai_j} = d_n \quad (5)$$

sendo:

$Q_{entra(i)}$ as vazões dos trechos i que chegam ao nó n ;

$Q_{sai(j)}$ as vazões dos trechos j que deixam o nó n ;

d_n a demanda concentrada nesse nó;

k_n o número de trechos com vazões chegando ao nó n ;

q_n o número de trechos com vazões saindo do nó n .

5. Velocidade máxima admissível:

A rede deve funcionar com velocidades de fluxo limitadas, de forma a se evitar a ocorrência de golpes de aríete, vibrações, como também um desgaste prematuro do sistema.

$$V_i \leq V_{\max} \quad (6)$$

onde:

V_i é a velocidade média no trecho i ;

V_{\max} é a velocidade máxima admissível.

6. Equidade de pressões nos nós:

Esta restrição relaciona as cotas piezométricas dos diferentes reservatórios do sistema. A cota piezométrica em um nó deve ser igual, qualquer que seja o caminho percorrido a partir das fontes. Esta restrição pode ser melhor compreendida através da Figura 1.

$$Z^1 - \sum_{i=1}^k J_{in}^1 = Z^2 - \sum_{i=1}^y J_{in}^2 = \dots = Z^m - \sum_{i=1}^w J_{in}^m \quad (7)$$

onde:

Z é a cota do reservatório;

$\sum_{i=1}^k J_{in}^1$ é a perda de carga entre o reservatório 1 e o nó n ;

m é o número de reservatórios

k , y e w o número de trechos entre o nó n e os reservatórios 1, 2 e m respectivamente.

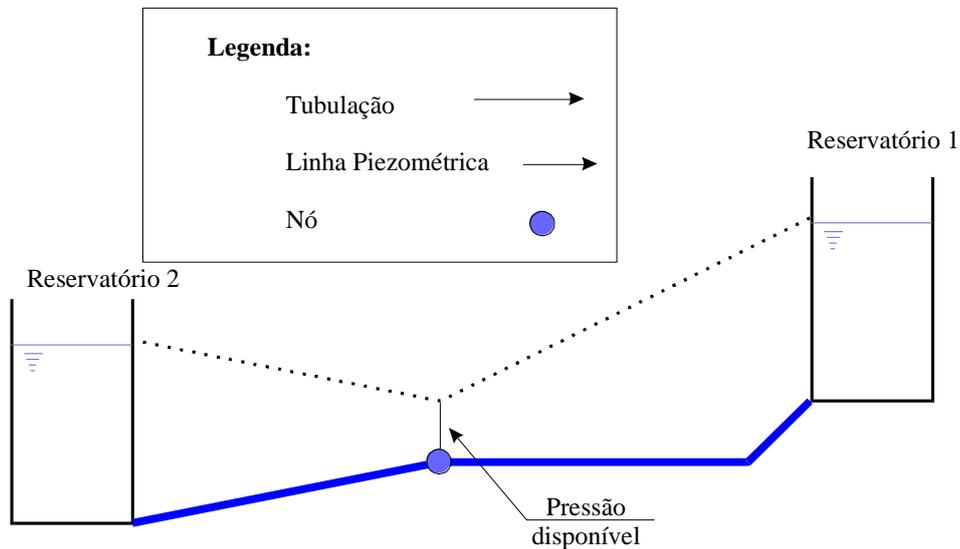


Figura 1 – Esquema da equidade de pressão nos nós

2ª Etapa

A partir dos resultados obtidos no pré-dimensionamento, executa-se a segunda etapa do método. Assim, para cada trecho, o diâmetro contínuo, obtido na primeira etapa, é desdobrado em dois diâmetros comerciais, sendo um o imediatamente superior, e o outro o imediatamente inferior àquele encontrado. Dessa forma, a função objetivo a ser minimizada será:

$$C(l_{ij}, Q_i^1, Q_i^2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^2 l_{ij} P(D_j)_i \quad (8)$$

em que:

$C(l_{ij}, Q_i^1, Q_i^2)$ é o custo total da rede de distribuição;

l_{ij} é o comprimento ocupado pelo diâmetro D_j no trecho i considerado;

$P(D_j)_i$ é o preço unitário do tubo de diâmetro D_j e;

m é o número de trechos da rede.

A função objetivo (eq. 6.17), tem como variáveis de decisão os comprimentos dos subtrechos l_{ij} , e as vazões Q_i . As restrições 1, 3, 4, 5 e 6 da etapa inicial também devem ser satisfeitas nesta fase, considerando as duas situações de demanda (condições de contorno). Além dessas, a solução encontrada deve satisfazer a mais dois grupos de restrições:

7. Comprimento dos subtrechos:

$$\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} = L_i \quad (9)$$

8. Não negatividade dos comprimentos dos sub-trechos

$$l_{ij} \geq 0 \quad (10)$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A metodologia descrita anteriormente foi utilizada para dimensionar uma rede fictícia proposta. Esta rede é composta por 9 trechos, distribuídos em dois anéis, e que é abastecida por dois reservatórios (Figura 2). O reservatório I, que está à cota 210 m, está ligado ao sistema de captação, enquanto que o reservatório II, que tem o nível da água na cota 195 m, é tido como reservatório de sobra.

Foi considerado que para o bom funcionamento da rede, a pressão mínima nos nós deveria ser de 30 m. Os trechos da rede possuem comprimento igual a 1.000 m, excetuando o trecho 9 (nove) que tem 100 m. A rede proposta foi otimizada considerando duas condições de contorno, caracterizada por duas situações de demanda que estão apresentados na Tabela 1. A vazão necessária para o enchimento do reservatório de sobra, no período de mínima demanda, foi considerada como sendo igual a um terço (1/3) da vazão total que a rede forneceria, através do reservatório I, na situação de máxima demanda horária. Na Tabela 1 estão apresentadas também as cotas dos nós da rede.

Os dados referentes aos custos dos tubos (em umt^3/m), que tem coeficiente de perda de Hazen-Williams igual a 130, com a mesma classe de pressão, são apresentados na Tabela 2.

³ unidades monetárias

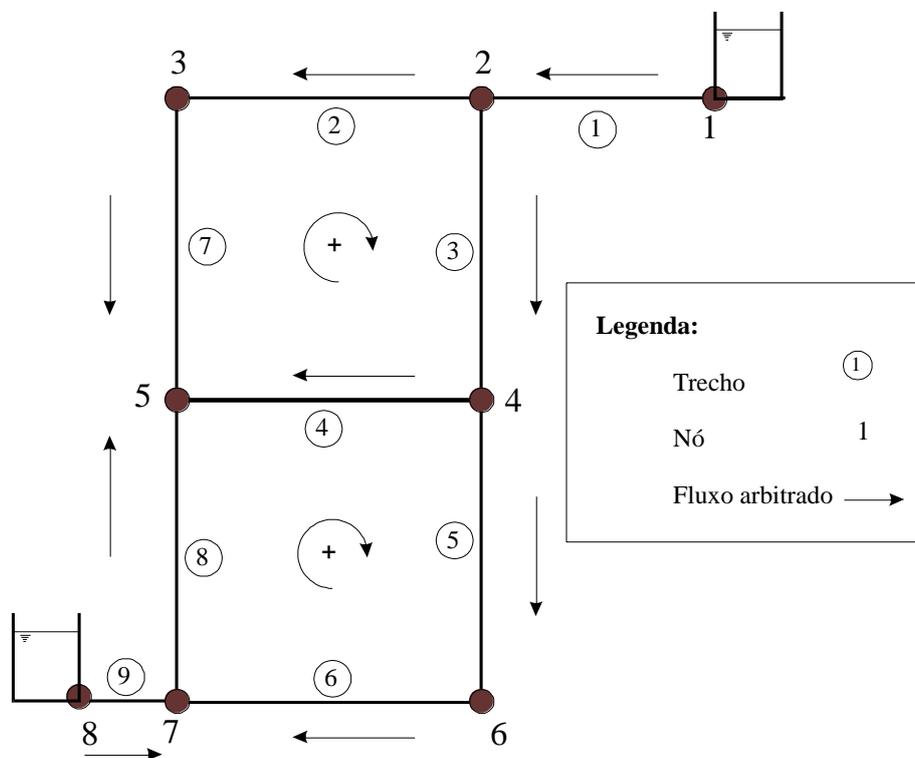


Figura 2 – Layout da rede do exemplo de aplicação

Tabela 1 – Dados referentes aos nós da rede

| Nó | Demanda Máxima (m ³ /h) | Demanda Mínima (m ³ /h) | Cota (m) |
|----|------------------------------------|------------------------------------|----------|
| 1 | - | - | 210 |
| 2 | 100 | 0 | 150 |
| 3 | 100 | 0 | 160 |
| 4 | 120 | 0 | 155 |
| 5 | 270 | 0 | 150 |
| 6 | 330 | 0 | 165 |
| 7 | 200 | 0 | 160 |
| 8 | - | - | 195 |

Tabela 2 – Custos dos tubos segundo seus diâmetros

| Diâmetro (mm) | Custo (UMT/m) | Diâmetro (mm) | Custo (UMT/m) |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 25 | 2 | 300 | 50 |
| 50 | 5 | 350 | 60 |
| 75 | 8 | 400 | 90 |
| 100 | 11 | 450 | 130 |
| 150 | 16 | 500 | 170 |
| 200 | 23 | 550 | 300 |
| 250 | 32 | 600 | 550 |

Para este exemplo, foram adotados os valores de velocidade máxima admissível na tubulação recomendados por Granados (Gomes, 1999).

O passo inicial para a aplicação do método consiste na definição da função que relaciona o preço do tubo com o diâmetro. A partir dos dados da Tabela 2, projetou-se a melhor curva de ajuste (Figura 2), resultando na seguinte expressão:

$$\text{Custo (D)} = 2,24 \times 10^{-13} D^6 - 3,27 \times 10^{-10} D^5 + 1,81 \times 10^{-7} D^4 - 4,61 \times 10^{-5} D^3 + 5,53 \times 10^{-3} D^2 - 1,71 \times 10^{-1} D + 3,81 \quad (11)$$

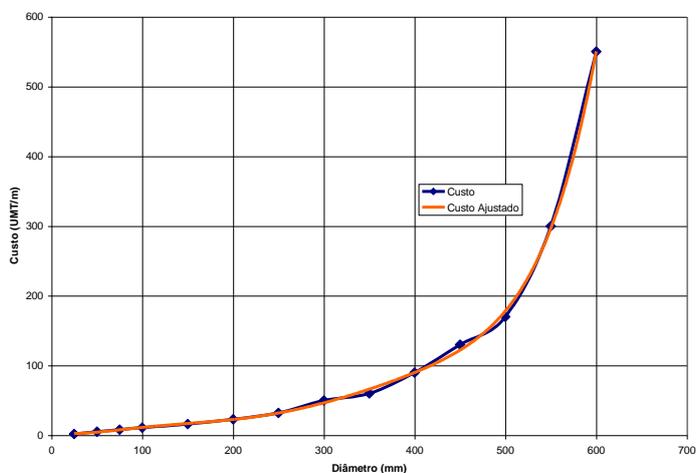


Figura 3 – Curva de ajuste Custo do Tubo x Diâmetro, correspondentes aos valores da Tabela 2

1ª Etapa

De posse da expressão que relaciona o custo da tubulação com o preço, tem-se a função objetivo, que será:

$$\begin{aligned}
C(D_i, Q^1_i, Q^2_i) &= 1.000 P(D_1) + 1.000 P(D_2) + 1.000 P(D_3) + 1.000 P(D_4) \\
&+ 1.000 P(D_5) + 1.000 P(D_6) + 1.000 P(D_7) + 1.000 P(D_8) \\
&+ 1.00 P(D_9)
\end{aligned} \tag{12}$$

Rearranjando os termos da equação tem-se:

$$\begin{aligned}
C(D_i, Q_i) &= 1.000 [(2,24 \times 10^{-13} D_1^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_1^5 + 1,81 \times 10^{-7} D_1^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_1^3 \\
&+ 5,53 \times 10^{-3} D_1^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_1 + 3,81) + (2,24 \times 10^{-13} D_2^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_2^5 \\
&+ 1,81 \times 10^{-7} D_2^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_2^3 + 5,53 \times 10^{-3} D_2^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_2 + 3,81) + \dots \\
&+ (2,24 \times 10^{-13} D_9^6 - 3,27 \times 10^{-10} D_9^5 + 1,81 \times 10^{-7} D_9^4 - 4,61 \times 10^{-5} D_9^3 + \\
&5,53 \times 10^{-3} D_9^2 - 1,71 \times 10^{-1} D_9 + 3,81)/10]
\end{aligned} \tag{13}$$

Essa função estará sujeita às seguintes restrições.

1. Pressão Mínima nos Nós:

As restrições de conservação da energia garantem que, independente do caminho escolhido entre os trechos, a queda de pressão será a mesma. Ao todo, serão doze equações de restrição de pressão, seis para cada situação de demanda (condição de contorno), sendo uma para cada nó, excetuando-se os nós 1 e 8. Para o nó 4, por exemplo, poder-se-ia escolher qualquer caminho que partisse do Reservatório I ou II. Considerou-se o caminho que parte do Reservatório I que tem o nível da água na cota 210, até aquele nó que está à cota 155. Entretanto, o caminho escolhido deve ser o mais curto, de modo a diminuir o tamanho da equação de restrição (na resolução adotou-se o caminho através dos trechos 1 e 3). Assim para o nó 4 tem-se a seguinte equação de restrição:

$$Nó 4: J_1 + J_3 \leq (210 - 155) - 30 \tag{14}$$

2. Diâmetros máximos e mínimos:

Todos os diâmetros (D_1, D_2, \dots, D_9) devem ser maiores do que 50 mm e menores do que 600 mm. Sendo 9 o número de trechos na rede, e havendo 2 inequações para cada trecho, o número de restrições, quanto ao diâmetro, será igual a 18. Ou seja:

$$D_i \geq 50 \quad p/ i=1,2,\dots,9 \tag{15}$$

$$D_i \leq 600 \quad p/ i=1,2,\dots,9 \tag{16}$$

3. Conservação da Energia nos Anéis:

Como não existem estações de bombeamento dentro da rede, essa restrição deve garantir que a soma algébrica das perdas de carga dos trechos de um anel seja nula. A rede deste exemplo é composta por dois anéis, o que proporcionará duas equações de restrição para cada situação de demanda, sendo assim o total igual a 4. Serão consideradas como positivas as perdas em que o sentido da vazão é o mesmo que o arbitrado para o anel (no caso contrário as perdas serão negativas). Dessa forma, tem-se para cada situação de demanda:

$$Anel 1: J_2 + J_7 - J_3 - J_4 = 0 \tag{17}$$

$$\text{Anel 2: } J_4 - J_5 - J_6 - J_8 = 0 \quad (18)$$

4. Continuidade nos nós:

A soma algébrica das vazões nos nós deve ser igual a zero, ou seja, as vazões que entram devem ser iguais às que saem. Estas restrições serão aplicadas para cada um dos nós, excetuando-se os nós dos dois reservatórios. Dessa forma, tem-se também 6 equações de restrição, para cada situação de projeto. Para a primeira situação tem-se:

$$\text{Nó 2: } Q^1_1 - Q^1_2 - Q^1_3 = 100 \quad (19)$$

$$\text{Nó 3: } Q^1_2 - Q^1_7 = 100 \quad (20)$$

$$\text{Nó 4: } Q^1_3 - Q^1_4 - Q^1_5 = 120 \quad (21)$$

$$\text{Nó 5: } Q^1_4 + Q^1_7 + Q^1_8 = 270 \quad (22)$$

$$\text{Nó 6: } Q^1_5 - Q^1_6 = 330 \quad (23)$$

$$\text{Nó 7: } Q^1_6 + Q^1_9 - Q^1_7 = 220 \quad (24)$$

Na situação de menos solicitação da rede, como visto na Tabela 1, as demandas nos nós internos da rede, são tidas como insignificantes ou nulas. A demanda requerida para o enchimento do Reservatório II foi estimada como sendo 1/3 daquela que é fornecida à rede na situação de máxima demanda, assim:

$$\text{Nó 2: } Q^2_2 + Q^2_3 = (Q^1_9)/3 \quad (25)$$

$$\text{Nó 3: } Q^2_2 - Q^2_7 = 0 \quad (26)$$

$$\text{Nó 4: } Q^2_3 - Q^2_4 - Q^2_5 = 0 \quad (27)$$

$$\text{Nó 5: } Q^2_4 + Q^2_7 + Q^2_8 = 0 \quad (28)$$

$$\text{Nó 6: } Q^2_5 - Q^2_6 = 0 \quad (29)$$

$$\text{Nó 7: } Q^2_6 - Q^2_7 = (Q^1_9)/3 \quad (30)$$

5. Velocidade Máxima Admissível:

A velocidade máxima em um trecho i é dada por:

$$V_i = \frac{Q_i}{\frac{\pi D_i^2}{4}} \quad (31)$$

Assim, aproximando tem-se que:

$$V_i = 1,273 \frac{Q_i}{D_i^2} \quad (32)$$

Sendo 9 o número de trechos ter-se-á também 9 restrições de velocidade nos trechos, para cada situação de projeto. Como não se conhece previamente os diâmetros dos trechos, e consequentemente a sua velocidade máxima adotada por Granados (Gomes 1999), empregou-se a fórmula que relaciona as velocidades nos trechos para diâmetros superiores a 1.000 mm, ou seja, $V = 2+D(m)$.

6. Equidade de pressões nos nós:

A restrição de conservação da energia nos nós garante que a perda de carga entre dois nós é a mesma, qualquer que seja o caminho percorrido pela água. Assim, para que se satisfaça a equidade de pressão nos nós, é necessário apenas, para cada uma das situações de projeto, que uma equação que relacione a cota dos dois reservatórios seja atendida. Neste caso foi considerada a equidade de pressão no nó 4, ou seja:

$$210 - J_1 - J_3 = 195 - J_9 - J_6 + J_5 \quad (33)$$

Montadas as equações, procede-se a otimização, utilizando o algoritmo GRG2 disponível na ferramenta Solver da Planilha Excel®. Os resultados da otimização dessa etapa são mostrados nas tabelas a seguir.

Tabela 3 – Resultados da otimização da rede na primeira etapa para a primeira condição de contorno (máxima demanda horária)

| Trecho | Vazão (l/s) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-------------|---------------|-----------------|--------------|------------------|
| 1 | 672,0 | 387 | 1000 | 6,03 | 1,59 |
| 2 | 104,1 | 160 | 1000 | 13,97 | 1,43 |
| 3 | 467,9 | 351 | 1000 | 4,95 | 1,34 |
| 4 | 5,7 | 50 | 1000 | 19,02 | 0,81 |
| 5 | 342,2 | 326 | 1000 | 4,02 | 1,14 |
| 6 | 12,2 | 181 | 1000 | 0,15 | 0,13 |
| 7 | 4,1 | 50 | 1000 | 10,00 | 0,57 |
| 8 | 260,2 | 224 | 1000 | 14,85 | 1,83 |
| 9 | 448,0 | 444 | 100 | 0,15 | 0,80 |

Tabela 4 – Resultados da otimização da rede na primeira etapa para a primeira condição de contorno (máxima demanda horária)

| Nó | Alt. Piez. (mca) | Cota (m) | Pres Disp. (mca) |
|----|------------------|----------|------------------|
| 1 | 210,00 | 210 | - |
| 2 | 203,97 | 150 | 53,97 |
| 3 | 190,00 | 160 | 30,00 |
| 4 | 199,02 | 155 | 44,02 |
| 5 | 180,00 | 150 | 30,00 |
| 6 | 195,00 | 165 | 30,00 |
| 7 | 194,85 | 160 | 34,85 |
| 8 | 195,00 | 195 | - |

Tabela 5 – Resultados da otimização da rede na primeira etapa para a segunda condição de contorno (mínima demanda)

| Trecho | Vazão (l/s) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Perdas (mca) | Velocidade (m/s) |
|--------|-------------|---------------|-----------------|--------------|------------------|
| 1 | 149,3 | 387 | 1000 | 0,37 | 0,35 |
| 2 | 5,0 | 160 | 1000 | 0,05 | 0,07 |
| 3 | 144,4 | 351 | 1000 | 0,56 | 0,41 |
| 4 | 4,9 | 50 | 1000 | 14,01 | 0,69 |
| 5 | 139,5 | 326 | 1000 | 0,76 | 0,47 |
| 6 | 139,5 | 181 | 1000 | 13,29 | 1,51 |
| 7 | 5,0 | 50 | 1000 | 14,52 | 0,70 |
| 8 | -9,8 | 224 | 1000 | -0,03 | -0,07 |
| 9 | -149,3 | 444 | 100 | -0,02 | -0,27 |

Tabela 6 – Resultados da otimização da rede na primeira etapa para a segunda condição de contorno (mínima demanda)

| Nó | Alt. Piez. (mca) | Cota | Pres Disp. (mca) |
|----|------------------|--------|------------------|
| 1 | 210,00 | 210,00 | - |
| 2 | 209,63 | 150,00 | 59,6 |
| 3 | 209,58 | 160,00 | 49,6 |
| 4 | 209,07 | 155,00 | 54,1 |
| 5 | 195,05 | 150,00 | 45,1 |
| 6 | 208,30 | 165,00 | 43,3 |
| 7 | 195,02 | 160,00 | 35,0 |
| 8 | 195,00 | 195,00 | - |

Tabela 7 – Custo da rede na primeira etapa

| Trecho | Diâmetro (mm) | Unitário (UMT/m) | Custo Total (UMT) |
|-------------|---------------|------------------|-------------------|
| 1 | 387 | 80,25 | 80.245,39 |
| 2 | 160 | 17,68 | 17.679,17 |
| 3 | 351 | 64,19 | 64.188,28 |
| 4 | 50 | 4,34 | 4.339,80 |
| 5 | 326 | 53,93 | 53.927,18 |
| 6 | 181 | 19,90 | 19.897,31 |
| 7 | 50 | 4,34 | 4.339,80 |
| 8 | 224 | 25,90 | 25.902,48 |
| 9 | 444 | 112,39 | 11.238,69 |
| Custo Total | | | 281.758,10 |

2ª Etapa

Com os resultados dos diâmetros e vazões obtidos na primeira etapa do dimensionamento, executa-se um novo processo de otimização, considerando como variáveis de decisão as vazões e os comprimentos dos sub-trechos. Para cada trecho serão adotados dois diâmetros comerciais, um imediatamente superior e outro imediatamente inferior ao obtido na etapa anterior. A Tabela 8 mostra os diâmetros comerciais utilizados.

Tabela 8 – Diâmetros utilizados na segunda etapa

| Trecho | Diâmetro (mm) | Trecho | Diâmetro (mm) |
|--------|---------------|--------|---------------|
| 1 | 350,0 | 6 | 150,0 |
| | 400,0 | | 200,0 |
| 2 | 150,0 | 7 | 50,0 |
| | 200,0 | | 75,0 |
| 3 | 350,0 | 8 | 250,0 |
| | 400,0 | | 300,0 |
| 4 | 50,0 | 9 | 350,0 |
| | 75,0 | | 400,0 |
| 5 | 350,0 | - | |
| | 400,0 | | |

Desta forma, a função objetivo que representa o custo total da rede será dada por:

$$C(l_{ij}, Q_i) = \{ [l_{1,350} P(350) + l_{1,400} P(400)] + [l_{2,150} P(150) + l_{2,200} P(200)] + [l_{3,350} P(350) + l_{3,400} P(400)] + [l_{4,50} P(50) + l_{4,75} P(75)] + [l_{5,300} P(300) + l_{5,350} P(350)] + [l_{6,150} P(150) + l_{6,200} P(200)] + [l_{7,50} P(50) + l_{7,75} P(75)] + [l_{8,250} P(250) + l_{8,300} P(300)] + [l_{9,350} P(350) + l_{9,400} P(400)] \} \quad (34)$$

Substituindo os valores dos preços dos tubos (Tabela 2), tem-se:

$$C(l_{ij}, Q_i) = \{ [l_{1,350} 60 + l_{1,400} 90] + [l_{2,150} 16 + l_{2,200} 23] + [l_{3,350} 60 + l_{3,400} 90] + [l_{4,50} 5 + l_{4,75} 8] + [l_{5,300} 50 + l_{5,350} 60] + [l_{6,150} 16 + l_{6,200} 23] + [l_{7,50} 5 + l_{7,75} 8] + [l_{8,250} 32 + l_{8,300} 50] + [l_{9,350} 60 + l_{9,400} 90] \} \quad (35)$$

Essa função objetivo estará sujeita às seguintes restrições:

1. Pressão mínima nos nós

De modo semelhante ao que ocorre na primeira etapa, a pressão em cada nó deve ser mantida de forma a assegurar o bom funcionamento da rede. Como cada trecho foi dividido em duas partes, contendo diâmetros distintos, a perda de carga desses trechos

será igual a soma da perda de carga nos sub-trechos com tais diâmetros. Assim, para o nó 4 tem-se:

$$\text{Nó 4: } (J_{1,350} + J_{1,400}) + (J_{3,350} + J_{3,400}) \leq (210 - 155) - 30 \quad (36)$$

3. Conservação de energia nos anéis

$$\text{Anel 1: } (J_{2,150} + J_{2,200}) + (J_{7,50} + J_{7,75}) - (J_{3,350} + J_{3,400}) - (J_{4,50} + J_{4,75}) = 0 \quad (37)$$

$$\text{Anel 2: } (J_{4,50} + J_{4,75}) - (J_{5,300} + J_{5,350}) - (J_{6,150} + J_{6,200}) - (J_{8,300} + J_{8,350}) = 0 \quad (38)$$

4. e 5. Continuidade nos nós e Velocidade máxima admissível

As equações de continuidade nos nós são idênticas às utilizadas na 1ª etapa do método.

6. Equidade de pressões nos nós

$$210 - (J_{1,350} + J_{1,400}) - (J_{3,350} + J_{3,400}) = 195 - (J_{9,350} + J_{9,400}) + (J_{6,150} + J_{6,200}) + (J_{5,300} + J_{5,350}) \quad (39)$$

7. Comprimento dos trechos

A soma dos comprimentos dos sub-trechos, deve ser igual ao comprimento de cada trecho. Sendo o número de trechos igual a oito, haverá oito equações de restrição deste tipo.

$$\text{Trecho 1: } l_{1,350} + l_{1,400} = 1.000 \quad (40)$$

$$\text{Trecho 2: } l_{2,150} + l_{2,200} = 1.000 \quad (41)$$

$$\text{Trecho 3: } l_{3,350} + l_{3,400} = 1.000 \quad (42)$$

$$\text{Trecho 4: } l_{4,50} + l_{4,75} = 1.000 \quad (43)$$

$$\text{Trecho 5: } l_{5,300} + l_{5,350} = 1.000 \quad (44)$$

$$\text{Trecho 6: } l_{6,150} + l_{6,200} = 1.000 \quad (45)$$

$$\text{Trecho 7: } l_{7,50} + l_{7,75} = 1.000 \quad (46)$$

$$\text{Trecho 8: } l_{8,300} + l_{8,350} = 1.000 \quad (47)$$

$$\text{Trecho 9: } l_{9,350} + l_{9,400} = 100 \quad (48)$$

8. Não negatividade dos comprimentos dos sub-trechos

Todos os comprimentos dos sub-trechos devem ser maiores ou superiores a zero. Havendo oito trechos, com dois sub-trechos cada um, têm-se um total de desesseis inequações de restrições.

Armada a função objetivo e as restrições, procedeu-se a otimização, que apresentou como resultado os valores apresentados nas Tabelas 9 a 13.

Tabela 9 – Resultados da otimização da rede na segunda etapa para a primeira condição de contorno (máxima demanda horária)

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Perdas (m) | Perda no trecho | Velocidade (m/s) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------|-----------------|------------------|
| 1 | 681,8 | 350,0 | 334 | 3,38 | 6,89 | 1,97 |
| | | 400,0 | 666 | 3,51 | | 1,51 |
| 2 | 107,3 | 150,0 | 526 | 10,73 | 13,11 | 1,69 |
| | | 200,0 | 474 | 2,38 | | 0,95 |
| 3 | 474,5 | 350,0 | 1000 | 5,17 | 5,17 | 1,37 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | 1,05 |
| 4 | 4,5 | 50,0 | 1000 | 12,01 | 12,01 | 0,63 |
| | | 75,0 | 0 | 0,00 | | 0,28 |
| 5 | 350,0 | 350,0 | 1000 | 2,94 | 2,94 | 1,01 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | 0,77 |
| 6 | 20,0 | 150,0 | 321 | 0,29 | 0,45 | 0,32 |
| | | 200,0 | 679 | 0,15 | | 0,18 |
| 7 | 7,3 | 50,0 | 0 | 0,00 | 4,07 | 1,03 |
| | | 75,0 | 1000 | 4,07 | | 0,46 |
| 8 | 258,3 | 250,0 | 1000 | 8,62 | 8,62 | 1,46 |
| | | 300,0 | 0 | 0,00 | | 1,01 |
| 9 | 438,2 | 350,0 | 100 | 0,45 | 0,45 | 1,27 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | 0,97 |

Tabela 10 – Resultados da otimização da rede na segunda etapa para a primeira condição de contorno (máxima demanda horária)

| Nó | Alt. Piez. (m) | Demanda (m ³ /h) | Cota (m) | Pres Disp. (mca) |
|----|----------------|-----------------------------|----------|------------------|
| 1 | 210,0 | - | 210 | - |
| 2 | 203,1 | 100 | 150 | 53,1086 |
| 3 | 190,0 | 100 | 160 | 30,0000 |
| 4 | 197,9 | 120 | 155 | 42,9413 |
| 5 | 185,9 | 270 | 150 | 35,9312 |
| 6 | 195,0 | 330 | 165 | 30,0000 |
| 7 | 194,6 | 200 | 160 | 34,5541 |
| 8 | 195,0 | - | 195 | - |

Tabela 11 – Resultados da otimização da rede na segunda etapa para a segunda condição de contorno (mínima demanda)

| Trecho | Vazão (m ³ /h) | Diâmetro (mm) | Comprimento (m) | Perdas (m) | Perda no trecho | Velocidade (m/s) |
|--------|---------------------------|---------------|-----------------|------------|-----------------|------------------|
| 1 | 146,1 | 350,0 | 334 | 0,19 | 0,40 | 0,42 |
| | | 400,0 | 666 | 0,20 | | 0,32 |
| 2 | 14,2 | 150,0 | 526 | 0,25 | 0,31 | 0,22 |
| | | 200,0 | 474 | 0,06 | | 0,13 |
| 3 | 131,8 | 350,0 | 1000 | 0,48 | 0,48 | 0,38 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | 0,29 |
| 4 | 4,9 | 50,0 | 1000 | 13,99 | 13,99 | 0,69 |
| | | 75,0 | 0 | 0,00 | | 0,31 |
| 5 | 127,0 | 350,0 | 1000 | 0,45 | 0,45 | 0,37 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | 0,28 |
| 6 | 127,0 | 150,0 | 321 | 8,95 | 13,61 | 2,00 |
| | | 200,0 | 679 | 4,66 | | 1,12 |
| 7 | 14,2 | 50,0 | 0 | 0,00 | 14,16 | 2,01 |
| | | 75,0 | 1000 | 14,16 | | 0,90 |
| 8 | -19,1 | 250,0 | 1000 | -0,07 | -0,07 | -0,11 |
| | | 300,0 | 0 | 0,00 | | -0,08 |
| 9 | -146,1 | 350,0 | 100 | -0,06 | -0,06 | -0,42 |
| | | 400,0 | 0 | 0,00 | | -0,32 |

Tabela 13 – Resultados da otimização da rede na segunda etapa para a segunda condição de contorno (mínima demanda)

| Nó | Alt. Piez. (m) | Demanda (m ³ /h) | Cota (m) | Pres Disp. (mca) |
|----|----------------|-----------------------------|----------|------------------|
| 1 | 210,0 | - | 210 | - |
| 2 | 209,6 | 0 | 150 | 59,6027 |
| 3 | 209,3 | 0 | 160 | 49,2913 |
| 4 | 209,1 | 0 | 155 | 54,1206 |
| 5 | 195,1 | 0 | 150 | 45,1277 |
| 6 | 208,7 | 0 | 165 | 43,6709 |
| 7 | 195,1 | 0 | 160 | 35,0583 |
| 8 | 195,0 | 146,1 | 195 | - |

Tabela 12 – Custo da rede na segunda etapa.

| Trecho | Diâmetro (mm) | Custo Unitário (UMT/m) | Custo UMT |
|--------|---------------|------------------------|-----------|
| 1 | 350,0 | 60,00 | 20.052 |
| | 400,0 | 90,00 | 59.923 |
| 2 | 150,0 | 16,00 | 8.420 |
| | 200,0 | 23,00 | 10.896 |
| 3 | 350,0 | 60,00 | 60.000 |
| | 400,0 | 90,00 | - |
| 4 | 50,0 | 5,00 | 5.000 |
| | 75,0 | 8,00 | - |
| 5 | 350,0 | 60,00 | 60.000 |
| | 400,0 | 90,00 | - |
| 6 | 150,0 | 16,00 | 5.142 |
| | 200,0 | 23,00 | 15.609 |
| 7 | 50,0 | 5,00 | - |
| | 75,0 | 8,00 | 8.000 |
| 8 | 250,0 | 32,00 | 32.000 |
| | 300,0 | 50,00 | - |
| 9 | 350,0 | 60,00 | 6.000 |
| | 400,0 | 90,00 | - |
| Total | | | 291.041 |

CONCLUSÕES

Devido ao seu alto grau de complexidade, o dimensionamento de redes malhadas tem sido feito, na maioria dos casos, baseado em métodos tradicionais, como o de Hardy – Cross e do Seccionamento Fictício. Essas metodologias não consideram o aspecto econômico e fazem apenas o balanceamento das vazões na rede de distribuição, ficando a minimização de custos a critério da experiência do projetista, que diante das dificuldades envolvidas e do volume de cálculos necessário, dificilmente conseguem alcançar a solução de mínimo custo para a rede.

O método proposto mostrou-se bastante eficiente na resolução dos problemas em que ele foi aplicado. Essa eficiência se deve à utilização de uma técnica de programação não linear para se fazer o dimensionamento das redes malhadas, que é um problema regido por equações não lineares. Além disso, ao se incluir as vazões como variáveis de decisão, procurou-se unir, em um mesmo processo, o balanceamento das vazões nas redes e a minimização dos custos.

O dimensionamento econômico de redes malhadas através da programação não linear apresenta como vantagens: a) o fato de poder ser implementado através de qualquer pacote computacional de otimização, no que se incluem as planilhas eletrônicas; b) a facilidade que há na sua utilização e compreensão, bem como a possibilidade de modificações na estrutura da função objetivo ou na inclusão de novas restrições, o que dá ao modelo uma maior flexibilidade em se ajustar ao estilo do engenheiro projetista.

A introdução de duas condições de operação da rede (com máximas e mínimas demandas de vazão nos pontos de consumo), foi perfeitamente representada pelo modelo da programação não linear. A introdução dessas duas condições de contorno representou um avanço metodológico no processo de otimização de redes malhadas de abastecimento. Os resultados obtidos no dimensionamento apresentado comprovaram a aplicação da metodologia apresentada neste trabalho.

REVISÃO BIBLIOGRAFIA

- FORMIGA, K. M. – Metodologia de Otimização de Redes Malhadas Através da Programação Não Linear. Dissertação de Mestrado no curso de pós-graduação de engenharia civil da UFPB. Campina Grande, 1999.
- GOMES, H. P. – Engenharia de Irrigação, Hidráulica dos Sistemas Pressurizados. 3º Edição. Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, 1999.
- HAMBERG, Dan; SHAMIR, Uri. *Schematic Models for Distribution Systems Design I: Combination Concept*. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 114. N. 2. p. 129-162. New York, NY, USA, 1988.
- LANSEY, Kevin E.; MAYS, Larry W.. *Optimization Model for Water Distribution System Design*. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol 115 N° 10, p. 1401-1419, New York, NY, USA, 1989.
- SANTANA, Gilson C.; SOARES, Secundino. *Otimização da Operação de Sistemas de Abastecimento de Água*. Anais do XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. ABRH. Vitória, ES, 1997.
- WALSKI, Thomas M. et alli. *Battle of the Network Models: Epilogue* Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 113. N. 2. p. 191-203. New York, NY, USA, 1987.