

## ANALOGIA DE "ROLL WAVES" AO PROBLEMA DE VAN DER POL.

Geraldo de Freitas Maciel<sup>1</sup>, Francisco Lledo<sup>2</sup>

**Resumo** - A proposta desta comunicação científica é verificar a adaptabilidade de um problema tipo Van Der Pol ao estudo de "roll waves". Para isso, um estudo de estabilidade linear foi empreendido fornecendo-nos as seguintes condições: i)  $F > \varphi(k, \sigma(F, \varepsilon, \theta), Re, C^*, \alpha)$  onde F, número de Froude, é função de k: número de onda,  $\sigma$ : função de Froude,  $\varepsilon$ : esbeltez da onda,  $\theta$ : declividade do canal; Re: número de Reynolds,  $C^*$ : parâmetro de Bingham (coesão do fluido) e  $\alpha$  o coeficiente de distribuição de velocidade na vertical. ii)  $1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)}$  onde U é a velocidade de propagação da "roll wave". Em primeira aproximação, pareceu-nos realística a proposta em tela dada a estrutura funcional semelhante do oscilador Van Der Pol à equação da "roll wave".

**Abstract** - The purpose of this article is to investigate in detail the Van Der Pol problem adaptability to explain roll-waves phenomena. In this context, a linear instability analysis for a uniform flow was undertaken. From this analysis we obtained two conditions: i)  $F > \varphi(k, \sigma(F, \varepsilon, \theta), Re, C^*, \alpha)$  with F: Froude's Number, k: wavenumber,  $\sigma$ : function of Froude,  $\varepsilon$ : steepness,  $\theta$ : slope of the canal; Re: Reynold's Number,  $C^*$ : Bingham's parameter (cohesion of the fluid) and  $\alpha$  the coefficient presented into the momentum equation that takes into account the different velocity profiles. ii)  $1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)}$ , U is the "roll wave" celerity.

**Palavras-chave** : "roll wave", fluido de Bingham, "shallow water", análise dinâmica.

---

<sup>1</sup> Professor - Departamento de Engenharia Civil - Dec/Feis/Unesp  
Alameda Bahia, 550 - 15.385-000 São Paulo - Brasil E-mail: [maciel@dec.feis.unesp.br](mailto:maciel@dec.feis.unesp.br)

<sup>2</sup> Graduando - Engenharia Civil - Dec/Feis/Unesp - Bolsista Fapesp - SP

## INTRODUÇÃO

Os escoamentos que se processam sobre fortes declividades podem desenvolver instabilidades. O aspecto caótico presente na natureza desses fenômenos instáveis, parece tender, ao cabo de tempo finito, para um escoamento estacionário, mais estável, com o aparecimento de ondas longas e periódicas em forma de ressalto hidráulico ou “bore waves”. Tais perturbações são denominadas de “roll waves”. Se por um lado, essas ondas são raras em escoamentos naturais, elas são freqüentes em canais artificiais e vertedouros de barragens, por exemplo.

Jeffreys em 1925 foi o primeiro a estabelecer um critério sobre a formação de “Roll Waves” a partir de uma análise de estabilidade linear. Deduziu que o escoamento uniforme tornava-se instável se o número de Froude fosse superior a 2. Dressler (1949) realizou uma análise com base na formulação de Saint Venant (“shallow water equations”) sem os termos de difusão, combinada à equação do ressalto hidráulico. Sua análise sintética e eminentemente correta, não permite, entretanto, determinar o comprimento destas ondas. Retomando o trabalho clássico de Dressler, achamos de bom alvitre, rededuzir as condições de existência de “roll-waves”, o que nos permitiu aprofundar nas peculiaridades e complexidades do fenômeno em questão. Na última década, Needham (1984) e Merkin (1986) incluem no equacionamento os termos de difusão, o que permitiu obter informações sobre o comprimento daquelas perturbações, ainda que o termo difusivo naquele equacionamento não estivesse corretamente adaptado ao grupo “shallow water” (tratamento mais correto do termo difusivo é introduzido nesse artigo), isto sem levar em conta uma certa complexidade na aplicação direta dos resultados daqueles autores a um problema de engenharia. Também nesta época, no contexto de “roll-waves” em reologia não-newtoniana, Bakhvolog e Eglit (1983-1984), estudando avalanchas densas, efetuaram análise análoga à de Dressler, quando introduzem um termo dissipativo suplementar modelado por um atrito sólido. Hutter e Savage (1988) também investem no estudo dos critérios de formação de “Roll Waves”. Sua contribuição reside no fato de tentar substituir o atrito sólido pela coesão do fluido. Enfim, além das contribuições de Needham (1984) e Merkin (1986) já citadas, não podemos esquecer de Hwang e Chang (1987) que passam a estudar, sob um plano eminentemente teórico, a formação de “Roll Waves” através da Teoria da Bifurcação. Recentemente, encontramos os trabalhos de Kranenburg (1992) que também, utilizando-se do grupo “shallow-water” comprovam a condição de existência já estabelecida por Dressler (1949); observando o fato que para perturbações de diversos comprimentos de onda, a de maior comprimento prevaleceria sobre a “roll wave” gerada. Enfim, a grosso modo, todas estas observações e estudos anteriores nos levam a crer que as “roll waves” podem se desenvolver em fluidos newtonianos e também em fluidos não-newtonianos.

Uma primeira tentativa de cunho teórico, consistiu em aproximar as equações "shallow water" com difusão às "roll waves"; o que nos permitiu definir critérios de geração e estabilidade (Freitas Maciel et al., 1997). Uma segunda tentativa de cunho numérico consistiu no desenvolvimento de programa computacional com base na teoria de sistemas hiperbólicos não lineares e utilização de esquemas numéricos tipo Godunov-VanLeer (Freitas Maciel, 1998, VanLeer, 1981).

Ainda no contexto teórico-numérico, o objetivo desta comunicação científica é diagnosticar o assunto em tela tratando-o como um "problema do tipo Van Der Pol", dada a semelhança funcional da equação diferencial do oscilador à fenomenologia "roll wave".

### **ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR DO SISTEMA "SHALLOW-WATER" EM FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS.**

O objetivo desse item é analisar o escoamento em canal usando como sistema principal as equações "shallow water". Ressalta-se que a equação da quantidade de movimento apresenta no segundo membro os termos de gravidade, efeito de parede tipo Chézy, notadamente os efeitos difusivos devido a viscosidade do fluido; e o efeito de Bingham (1922), característico de fluidos não-newtonianos.

**Em se tratando de fluidos newtonianos (tensão crítica de cisalhamento reduzida,**

**$\frac{\tau_c}{\rho} = 0$ ) o sistema "shallow water" é dado por:**

- equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento modificada:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + g \cdot \cos(\theta) \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tau_c}{\rho} + g \cdot h \cdot \sin(\theta) - \frac{g \cdot u^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

sendo:

h : profundidade do escoamento

u : velocidade média vertical

C : coeficiente de Chézy

$\theta$  : declividade do canal

$\rho$  : massa específica do fluido

$\nu$  : viscosidade do fluido

$\alpha$  : coeficiente de distribuição de velocidade

$\frac{\tau_c}{\rho}$  : tensão crítica de cisalhamento reduzida = 0

Adimensionalizando o sistema (1-2) com as escalas convenientes tem-se: a escala de comprimento  $x = L.x^*$ ,  $h = h_n.h^*$ , onde  $L$  representa o comprimento de onda e a escala de velocidades  $u = u_n.u^*$ . O índice  $n$  representa as condições de escoamento uniforme e o asterisco (\*) as variáveis adimensionais. Introduzindo essas variáveis adimensionais e omitindo os asteriscos (\*), obtém-se após alguns desenvolvimentos matemáticos, o sistema:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha.u.\frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1).\frac{u}{h}.\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{F^2}.\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2}.\left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}}.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (4)$$

A fim de analisar o estudo "quase permanente" do sistema "shallow-water", fazemos uma mudança de variável (referencial móvel) a saber:  $z = x - Ut$  (onde  $U$  é uma velocidade constante de propagação da "roll wave"). Isso posto e aplicando uma mudança de variável às equações (3) e (4) obtém-se:

$$z = x - U.t$$

- conservação da massa

$$h.(u - U) = 1 - U \quad (5)$$

- conservação da quantidade de movimento

$$-U.\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha.U.\frac{\partial u}{\partial z} - (\alpha - 1).\frac{u}{h}.U.\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{F^2}.\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2}.\left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}}.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{h}.\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial h}{\partial z}\right) \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6) e eliminando a variável  $u$ , obtemos uma equação diferencial de segunda ordem na variável  $h$ , a saber:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\text{Re}}{F^2(1-U)} \cdot \left\{ h^3 - \alpha F^2(1-U)^2 + \alpha \left[ U^2 h^2 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon \cdot F^2(U-1)h} = 0 \quad (7)$$

sendo:

$$h_1 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] - \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] + \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

Verifica-se que para obtermos  $h_1$  e  $h_2$  reais, é necessário que  $U > 1$ .

**Em se tratando de fluidos não-newtonianos (efeito de Bingham,  $\frac{\tau_c}{\rho} \neq 0$ ) e**

**adotando o mesmo procedimento anterior, chegamos à equação (8) dada por:**

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\text{Re}}{F^2(1-U)} \cdot \left\{ h^3 - \alpha F^2(1-U)^2 + \alpha \left[ U^2 h^2 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1^*)(h-h_2^*)}{\varepsilon \cdot F^2(U-1)h} = 0 \quad (8)$$

onde:

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] - \sqrt{\left( (U+1) + \sqrt{\left( 1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right) \left( (U+1) - \sqrt{\left( 1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right)} \right\}$$

$$h_2^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] + \sqrt{\left( (U+1) + \sqrt{\left( 1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right) \left( (U+1) - \sqrt{\left( 1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right)} \right\}$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho \cdot g \cdot h \cdot \text{sen}(\theta)}$$

No objetivo de verificar a existência de soluções periódicas para a equação (8), surge a necessidade de estudá-la em seu plano de fases. Para tanto, impõe-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = w = F_1(h, w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = F_2(h, w) \end{cases} \quad (9)$$

Estudo dos pontos de equilíbrio:

$$F_1(h, w) = 0 \rightarrow w = 0$$

$$F_2(h, w) = 0 \rightarrow h = 1$$

Donde verifica-se que o escoamento uniforme ( $h=1$  e  $w = 0$ ) é um ponto de equilíbrio.

Podemos então pensar em verificar a existência ou não de órbitas fechadas ao redor deste ponto de equilíbrio. Assim sendo, deverão existir soluções periódicas para o problema pesquisado.

Através de um processo de linearização do sistema (9) na vizinhança do ponto de equilíbrio  $(h, w) = (1, 0)$ , obtemos o sistema linear de equações, a saber:

$$h = 1 + \beta \bar{h} \quad \text{e} \quad w = \varphi \bar{w} \quad \text{onde,} \quad \varphi \ll 1 \quad \text{e} \quad \beta \ll 1.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \bar{w} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \bar{w} - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2.(1-C^*)(1-U) \right\} \bar{h} \end{cases} \quad (10)$$

Exposto isto, passamos a determinar os autovalores  $\lambda_i$  ( $i=1,2$ ) do sistema (10), a partir do cálculo do determinante  $\Delta$ , dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2.(1-C^*)(1-U) \right\} & \frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \end{bmatrix}$$

O que resulta na equação quadrática em  $\lambda$ , conforme se segue:

$$\lambda^2 - \frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \lambda^1 - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \{1 + 2.(1-C^*)(1-U)\} \lambda^0 = 0$$

Para obtermos auto-valores reais e distintos e por conseguinte órbitas fechadas (ou soluções periódicas) torna-se necessário que o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  seja estritamente superior à zero. Assim sendo, tem-se:

$$\left( -\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \right)^2 - 4.1. \left( -\frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \{1 + 2(1-U)\} \right) > 0$$

$$4. 1. \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \{1 + 2.(1-C^*)(1-U)\} > 0$$

Ou seja:

$$1 + 2.(1-C^*)(1-U) > 0 \quad \Rightarrow \quad U < \frac{3-2.C^*}{2.(1-C^*)}$$

$$U-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad U > 1$$

O que resulta:

$$1 < U < \frac{3-2.C^*}{2.(1-C^*)} \quad (11)$$

Para a coesão nula ( $C^* = 0$ ), a equação (11) é dada por:

$$1 < U < \frac{3}{2} \quad (12)$$

### **ANALOGIA ENTRE O PROBLEMA DE VAN DER POL E O FENÔMENO DE "ROLL WAVE".**

A partir de análise comparativa da equação do oscilador de Van Der Pol dada por:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \mu.(h^2 - 1). \frac{\partial h}{\partial x} + a.h = 0 \quad ; \quad \mu > 0 \text{ e } a \text{ são constantes} \quad (13)$$

Observa-se que se  $\mu = 0$ , as soluções são ondas senoidais ou co-senoidais e se  $\mu > 0$  a segunda parte do 1º membro de (13) representará o termo resistivo, proporcional a  $\frac{\partial h}{\partial x}$ .

Quando  $h$  for grande, esse termo é positivo e reduz a amplitude das respostas. No entanto, se  $\mu$  for pequeno, o termo resistivo é negativo e provoca o crescimento da resposta. Isto sugere que, talvez, exista uma solução de dimensões intermediárias, da qual se aproxima as outras soluções, à medida que  $x$  cresce. Em sumo, as observações experimentais indicam que a equação de Van Der Pol tem uma solução periódica estável cujo período e amplitude depende do parâmetro  $\mu$ .

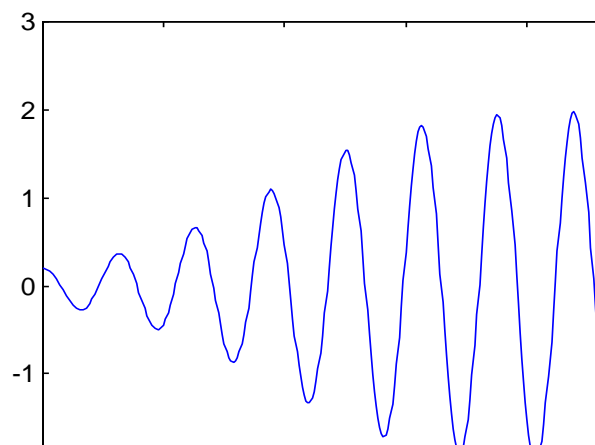
Por outro lado, temos a equação (8) representativa da fenomenologia "roll waves". Podemos, portanto, observar uma certa analogia funcional entre elas. Isso posto, é de nosso interesse, aliás objeto desse artigo, o estudo simultâneo da equação de Van Der Pol (eq. 13) e do fenômeno em questão (eq. (8)).

#### RESOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES (8) E (13):

No que diz respeito à resolução das equações (8) e (13), estas foram obtidas através do desenvolvimento de uma rotina de cálculo, utilizando-se o pacote computacional MATLAB, o que nos permitiu obter uma visão mais sensível do comportamento da equação.

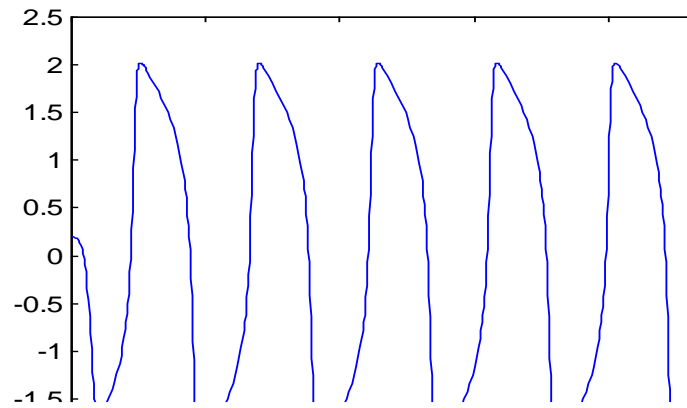
Ainda que parciais, são ilustrados abaixo alguns casos-tipo:

#### - VAN DER POL



**Figura 1** - Solução  $h(x)$  do problema de VAN DER POL, para  $\mu = 0.2$  e  $a = 1$ .



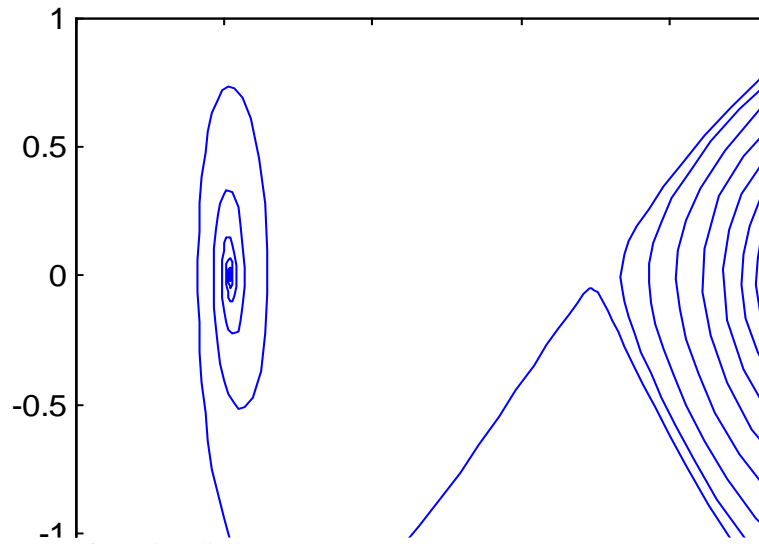


**Figura 2** - Solução  $h(x)$  do problema de VAN DER POL, para  $\mu = 3$  e  $a = 1$ .

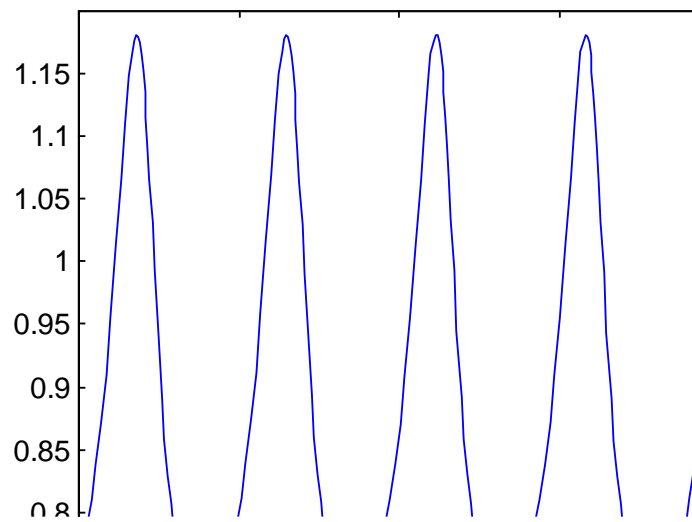
- **"ROLL WAVES" para fluidos newtonianos variando U.**

# 1.2

**Figura 3** - Resultado numérico  $h(x)$  sem "roll waves" estabilizadas  
 $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.381$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^0$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .



**Figura 4** - Plano de fase, ciclo limite em torno de (1,0)  
 $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.381$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .



**Figura 5** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.384$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .

**Figura 6** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.388$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .

**Figura 7** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.394$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .

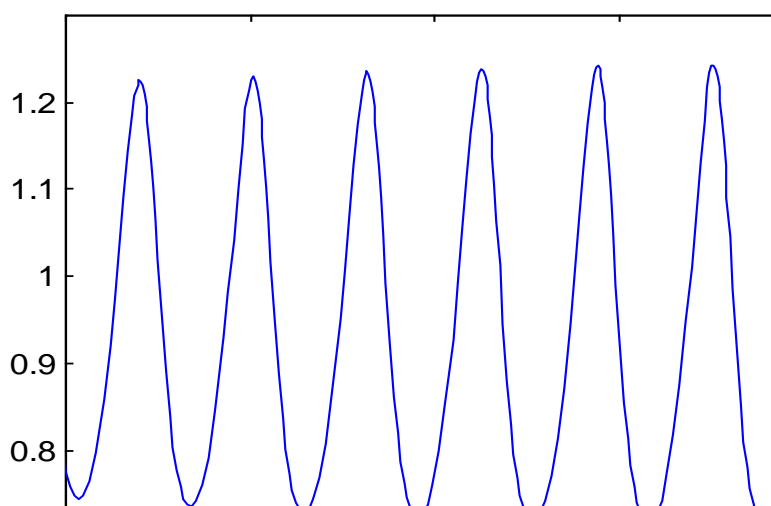
- "ROLL WAVES" para fluidos newtonianos variando Reynolds.

**Figura 8** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=10$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.39$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .

# 1.2

**Figura 9** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=30$ ,  $F=2.5$ ,  $U=1.39$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\theta=16^\circ$ ,  $\varepsilon=0.001$  e  $C^*=0$ .

- **"ROLL WAVES " para fluidos não-newtonianos variando Reynolds.**



**Figura 10** - Resultado numérico  $h(x)$ :  $Re=10, F=2.5, U=1.39, \alpha=1.0, \theta=16^\circ, \varepsilon=0.001$  e  $C^*=0.3$ .

### DISCUSSÕES E COMENTÁRIOS

Ainda que se tratem de resultados parciais, podemos extrair alguns ensinamentos dessa primeira tentativa de aproximação, a saber:

- do ponto de vista teórico, adquirimos conhecimentos na formulação do problema "shallow-water", suas propriedades e decorrências. Fomos capazes, a partir desse sistema e com base na análise de estabilidade linear, chegar a condição de existência de "roll-waves" no seio de escoamento newtoniano e não-newtoniano. Ainda nesse contexto, pudemos apontar resultados teóricos que puderam ser comprovados numericamente pela equipe de trabalho (Freitas Maciel et al., 1998).

- no que tange os resultados do problema de Van Der Pol (equação (13)), estes vão ao encontro do que pudemos observar no plano eminentemente numérico (Freitas Maciel, 1997, 1998) quando variávamos o Chézy do canal e introduzíamos o efeito de Bingham (coesão do fluido), ou seja antecipávamos a formação de "roll waves". No que diz respeito à variação do comprimento e/ou período da onda apontada por Van Der Pol quando  $\mu$  varia, este resultado foge ao escopo do modelo numérico (Freitas Maciel, 1997, 1998), pois naquele código de cálculo o período da onda ( ou comprimento, se desejarmos) era fixado

na perturbação de montante sobre o escoamento uniforme e este valor fixado, se reproduzia na "roll wave" gerada.

- no que diz respeito à aproximação das "roll waves" (equação (8)), ainda que parcialmente, pudemos verificar que:

- nas Figuras 3 e 4, verificamos a ocorrência de certa "instabilidade" do modelo matemático aparentemente devido à busca de novos pontos de equilíbrio em  $h_1$  e  $h_2$ . Pudemos determinar que  $h_2$  (conforme equação (8)) representaria a altura mínima

necessária para gerarmos "roll waves" com velocidade  $1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)}$ . Do ponto de

vista matemático isto é interpretado e deve resultar de uma bifurcação de Hopf do escoamento uniforme para uma determinada velocidade crítica.

- ao fixarmos os valores de Reynolds, Froude,  $\alpha$  (coef. de distribuição de velocidade),  $\theta$  (declividade do canal) e  $\varepsilon$  (esbeltez da onda); e variando a velocidade de propagação (U), notamos uma diminuição da amplitude e do comprimento das "roll waves" (Figuras 5, 6 e 7).

- ao fixarmos os valores de U, Froude,  $\alpha$  (coef. de distribuição de velocidade),  $\theta$  (declividade do canal) e  $\varepsilon$  (esbeltez da onda); e variando o número de Reynolds, notamos um aumento da amplitude e uma diminuição do comprimento das "roll waves" (Figuras 8 e 9).

- ao introduzirmos o efeito não-newtoniano,  $C^* = 0.30$ , conforme Figura 10, pudemos observar que não só antecipamos a formação de "roll waves", mas também sua amplitude aumentou, resultado esse em concordância com a teoria e aproximação numérica (Freitas Maciel et al. , 1998).

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

BARRE DE SAINT-VENANT, 1871. Théorie du mouvement non permanent des eaux, Institut de France, Académie des sciences, Comptes rendus, Paris Juillet 1871, vol 73, p 147-237.

BAKHVOLOV, N.S., EGLIT, M.E. - "Investigation of the solutions to snow avalanche movement equations", World Data Center for Glaciology, Soviet Research Avalanche bibliography update, 1977-1983, pp117-128.

BINGHAM, E. C., Fluidity and Plasticity (MacGraw-Hill, New York, 1922).

DRESSLER, R.F, "Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels". *Communs pure appl. Math.*, 1949, vol 2, p 149-194.

- FREITAS MACIEL,G., "Uma proposta de modelação de Roll waves em fluidos de Bingham" - XVII Congresso Nacional Del Agua. Santa Fe, Argentina. 1998.
- FREITAS MACIEL,G., VILA, J.P, MARTINET,G. "Roll wave formation in the non Newtonian flows" - XIV COBEM. Bauru, S.P., Brasil. 1997.
- FREITAS MACIEL,G., VILA, J.P, MARTINET,G. " Estudo teórico Numérico sobre "roll waves" - XII Simpósio Brasileiro de recursos Hídricos/ABRH. Vitória, E.S., Brasil. 1997.
- GODUNOV, S.K., "A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics", Math.Sb,47(89),1959,271-300.
- HUTTER, K., SAVAGE, S.B. - "The motion of a finite mass of gravel down a mountain side", Proceedings of the 5th International Symposium on Landslides, Lausanne, Switzerland, 1988.
- KRANENBURG, C. On the evolution of roll waves, J. Hydraulic Research, vol.245, 249-261, 1992.
- NEEDHAM, D.J., MERKIN, J.H. - "On roll waves down an open inclined channel", Proc. R. Soc. Lond A 394, 1984, pp 259-278.
- NEEDHAM, D.J., MERKIN, J.H. - "An infinite period bifurcation arising in roll waves down an open inclined channel", Proc. R. Soc. London A 405, 1986, pp 103-116.
- VANLEER B., "Toward the ultimate conservative difference scheme", Journal of Comp. Phys. 32,1981,101-136.