

UM MODELO NUMÉRICO DA HISTERESE E DO APRISIONAMENTO DE AR NA SIMULAÇÃO DO FLUXO DE ÁGUA EM MEIO NÃO-SATURADO

Joel Avruch Goldenfum¹

Resumo - Diversos processos naturais e aplicações relacionadas a fluxo não-saturado de água incluem ciclos sucessivos de embebição e drenagem, mas os efeitos da histerese são freqüentemente desconsiderados, em função da complexidade das teorias e das soluções numéricas envolvidas, além da dificuldade para obtenção de dados com número e qualidade adequados. Neste trabalho, foi selecionado, adaptado e testado um modelo de histerese em curvas de retenção de umidade do solo, incluindo efeitos de aprisionamento de ar, para simulação de fluxo não-saturado de água no solo. Uma das principais vantagens do modelo adotado é sua simplicidade paramétrica, que permite sua fácil implementação, sem requerer a especificação de novos parâmetros. Como ele exige o conhecimento de dois pontos prévios de reversão, foi desenvolvido um algoritmo para estimar estes valores, afim de fornecer as condições iniciais para simulação, permitindo seu uso com dados de campo. O modelo foi testado com dados experimentais da literatura e também com dados sintéticos, apresentando boa precisão na reprodução dos dados originais.

Abstract - Most processes in nature and applications related to unsaturated flow include successive cycles of wetting and drainage, but hysteresis effects are often neglected, due to the complexity of the related theories and numerical solutions, and also due the difficulty to obtain appropriate data. In this paper, a model of hysteresis considering air entrapment on water flow in the unsaturated zone is selected, adapted and tested. This model presents as its great advantage its parametric simplicity, which facilitates its implementation with minimal effort, not requiring any new parameter. As this model requires the knowledge of two previous reversal points, an algorithm was developed to estimate these values, providing the initial conditions for simulation and allowing its use with field data. The model performed quite well when tested with both experimental and synthetic data.

Palavras-Chave - histerese, não-saturado

¹ Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH) da UFRGS, Caixa Postal 15029, CEP 91501-970, Porto Alegre - RS. Tel.: (051) 316 6621. Fax: (051) 316 6565. e-mail: jag@if.ufrgs.br

INTRODUÇÃO

É de conhecimento geral que as curvas principais de embebição e drenagem de um solo diferem, observando-se, portanto, histerese na curva de retenção do solo, que relaciona o teor volumétrico de água (θ) como função do potencial mátrico (ψ). Esta irreversibilidade também é verificada, em menor grau, na curva de condutividade hidráulica, $K(\theta)$. Observa-se, ainda, que um solo submetido a ciclos sucessivos de embebição e drenagem exibe laços histeréticos de ordens superiores (as “scanning curves”, aqui chamados de curvas secundárias). Em função destas características, um ciclo de drenagem e embebição que comece na condição de saturação pode deixar bolsões isolados de ar no solo. Este ar aprisionado faz com que o primeiro ciclo histerético não seja fechado, embora o fechamento possa ser observado em ciclos posteriores. A diferença entre o máximo valor de umidade do solo nas curvas principais de drenagem e de embebição do solo corresponde ao ar aprisionado no processo.

Diversos processos naturais e aplicações relacionadas a fluxo não-saturado de água incluem ciclos sucessivos de embebição e drenagem. Por este motivo, qualquer estudo que almeje a simulação de tais situações deve levar em conta a natureza histerética das propriedades hidráulicas do solo. Não há unanimidade no que concerne à significância do efeito da histerese na predição do fluxo d'água e transporte de contaminantes na escala de campo. Conforme Kaluarachchi e Parker (1987), enquanto diversos estudos têm demonstrado que erros substanciais podem ser obtidos por se ignorar a influência da histerese, outros trabalhos sugerem que seus efeitos são muito pequenos. Mualem (1984) afirma que a histerese na curva de retenção do solo é raramente considerada devido a três motivos: (1) a complexidade das teorias sobre histerese; (2) a necessidade de uma grande quantidade de dados para calibração dos modelos; e (3) a complexidade das soluções numéricas para problemas de fluxo não saturado de água, que é substancialmente acrescida por condições de contorno variáveis quando a histerese é incluída.

Apesar destas restrições em seu uso e aplicação, diversos modelos têm sido desenvolvidos para descrever a histerese na curva de retenção do solo. Uma limitação importante para aplicação da maioria destes modelos é a hipótese que $\theta(\psi)$ apresenta um fechamento quando a tensão mátrica é nula ($\psi=0$), indicando que o aprisionamento de ar residual é inexistente ou independente do histórico de saturação do solo. Em escala de campo, porém, têm se verificado variações no aprisionamento de ar que afetam substancialmente o fluxo de água (Kaluarachchi e Parker, 1987).

Neste trabalho, um modelo de histerese que leva em conta o aprisionamento de ar no fluxo de água na zona não saturada, baseado naqueles apresentados por Kool e Parker (1987) e por Parker e Lenhard (1987) é desenvolvido e testado. Este modelo apresenta como uma de suas principais vantagens a sua simplicidade paramétrica, que facilita sua implementação com esforço mínimo a diversos modelos numéricos de fluxo de água no solo. Por outro lado, o modelo tem a desvantagem de ser necessário o conhecimento de dois pontos prévios de reversão (troca embebição-drenagem ou drenagem-embebição), o que dificulta seu uso com dados de campo, onde nem sempre o histórico anterior do

estado de saturação do solo é conhecido. Para permitir o uso do modelo quando os pontos prévios de reversão são desconhecidos, foi desenvolvido um algoritmo que estima estes pontos de reversão, fornecendo as condições iniciais de simulação.

DESCRIÇÃO DO MODELO PARA SIMULAÇÃO DA HISTERESE

As curvas principais de drenagem e embebição podem ser descritas por qualquer modelo paramétrico, tal como as equações de Brooks-Corey (1964) ou Van Genuchten (1980), descritas nas equações (1) e (2), respectivamente:

$$\begin{aligned} Se &= \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{P_b}{\psi} \right)^\lambda && \text{se } \psi < P_b \\ Se &= 1 && \text{se } \psi \geq P_b \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$\begin{aligned} Se &= \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{1}{1 + (\alpha|\psi|^n)} \right)^{(1-1/n)} && \text{se } \psi < 0 \\ Se &= 1 && \text{se } \psi \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

onde: Se = saturação efetiva;
 θ = teor volumétrico de água;
 θ_r = teor volumétrico residual de água;
 θ_s = teor volumétrico saturado de água;
 ψ = potencial mátrico;
 P_b = pressão de borbulhamento;
 λ = índice de distribuição de tamanho dos poros;
 α = parâmetro de escala;
 n = parâmetro de curvatura.

A curva principal de drenagem é representada por $\theta^d(\psi)$ e a curva principal de embebição por $\theta^w(\psi)$. Para se obter a descrição mais geral do processo, todos parâmetros das curvas de retenção são considerados como variáveis. Assim, adotando a equação de Van Genuchten, o laço histerético principal é descrito pelo vetor de parâmetros $(\theta_s^w, \theta_r^w, \alpha^w, n^w)$ para a curva principal de embebição e $(\theta_s^d, \theta_r^d, \alpha^d, n^d)$ para a curva principal de drenagem, obtendo-se um total de oito parâmetros desconhecidos. Esta notação pode ser simplificada para $(\theta_s^p, \theta_r^p, \alpha^p, n^p)$, onde p é um índice que determina se uma curva de drenagem (p=d) ou de embebição (p=w) é considerada. Para o caso da relação de Brooks-Corey, os vetores de parâmetros são representados por $(\theta_s^p, \theta_r^p, \lambda^p, P_b^p)$. Uma simplificação pode ser obtida adotando-se $\theta_r^d = \theta_r^w = \theta_r$.

As curvas secundárias são calculadas por um procedimento empírico que redimensiona por interpolação linear as funções das curvas principais para que elas passem por pontos

de reversão apropriados, garantindo o fechamento dos laços histeréticos. Desta forma, são evitados os indesejados “efeitos de bombeamento” descritos por Klute e Heermann (1974) e por Jaynes (1984), que ocorrem em modelos em que o fechamento dos laços histeréticos de ordem superior não é garantido, com a carga de pressão variando de forma cíclica. O redimensionamento das curvas principais é descrito pela equação (3):

$$\theta(\psi) = \left[\theta^p(\psi) - \theta^p(\psi_{l-1}^\Delta) \right] \frac{[\theta_l^\Delta - \theta_{l-1}^\Delta]}{[\theta^p(\psi_l^\Delta) - \theta^p(\psi_{l-1}^\Delta)]} + \theta_{l-1}^\Delta \quad (3)$$

onde $(\psi_l^\Delta, \theta_l^\Delta)$ e $(\psi_{l-1}^\Delta, \theta_{l-1}^\Delta)$ representam o ponto de reversão mais recente e o anterior, respectivamente, e $l-1$ é a ordem da curva secundária simulada. Determinando $l=0$ para $(\psi, \theta)=(-\infty, \theta_t)$ e $l=1$ para $(\psi, \theta)=(0, \theta_s^d)$, qualquer trecho entre pontos de reversão passa a ser descrito pela equação (3), com $p=d$ (drenagem) para l com valores ímpares e $p=w$ (embebição) para l com valores pares.

Quando ocorre o fechamento de uma curva secundária, l deve ser reduzido, e $\theta(\psi)$ retorna ao trecho entre pontos de reversão anteriormente trilhado. Assim, quando atinge-se $\theta > \theta_{l-1}^\Delta$ para l ímpar (embebição) ou $\theta < \theta_{l-1}^\Delta$ para l par (drenagem), deve-se subtrair 2 do valor de l , podendo-se eliminar da memória os valores de conteúdo volumétrico e tensão mátrica do ponto de reversão do laço fechado. Como valores de tensões e conteúdos volumétricos para $l+1$ pontos de reversão deveriam ser armazenados para todas locações espaciais em uma simulação numérica, os requerimentos de memória podem se tornar grandes quando curvas secundárias de alta ordem ocorrem. Na prática, torna-se necessário impor um limite para a curva secundária de ordem $l-1$. Quando este limite é alcançado, $\theta(\psi)$ pode ser considerado com comportamento não-histerético até que o fechamento traga l de volta à faixa de valor permitida. Como geralmente os efeitos histeréticos se tornam pequenos além de curvas secundárias de segunda ($l=3$) ou terceira ordem ($l=4$), a natureza empírica do esquema de interpolação adotado provavelmente não justifica um refinamento além deste nível (Parker e Lenhard, 1987).

Os efeitos de aprisionamento de ar são incorporados ao modelo utilizando relações desenvolvidas por Land (1968) e utilizadas por Aziz e Setari (1979). Analisando dados de bibliografia, Land verificou que as diferenças entre os inversos dos valores de saturação inicial e final de gás (S_{gi}^* e S_{gr}^* , respectivamente) são aproximadamente constantes para uma dada areia. Considerando que a saturação residual aumenta com a saturação inicial do gás e que, quando a saturação inicial do gás é unitária, a saturação residual do gás é igual à máxima saturação do gás ($S_{gr}^*_{m\acute{a}x}$), Land estabeleceu empiricamente que

$$\frac{1}{S_{gr}^*} - \frac{1}{S_{gi}^*} = \frac{1}{S_{gr}^*_{m\acute{a}x}} - 1 \quad (4)$$

Definindo a saturação residual para ar-água como função do conteúdo volumétrico de água, obtém-se:

$$S_{gr}^* = \frac{\theta_s^d - \theta_s^w}{\theta_s^d - \theta_r} \quad (5)$$

$$S_{gi}^* = \frac{\theta_s^d - \theta_l^\Delta}{\theta_s^d - \theta_r} \quad (6)$$

$$S_{gr}^* = \frac{\theta_s^d - \theta_s^w}{\theta_s^d - \theta_r} \quad (7)$$

onde θ_s^w é o conteúdo volumétrico de água na saturação através de embebição ao longo de uma curva secundária arbitrária começando em um ponto de reversão $(\psi_2^\Delta, \theta_2^\Delta)$. Substituindo as equações (5), (6) e (7) na equação (4) obtém-se

$$\theta_s^w = \theta_s^d - \theta_{ar} \quad (8)$$

com

$$\theta_{ar} = \frac{1}{\left[(\theta_s^d - \theta_2^\Delta)^{-1} + (\theta_s^d - \theta_s^w)^{-1} - (\theta_s^d - \theta_r)^{-1} \right]} \quad (9)$$

onde θ_{ar} é o ar residual aprisionado.

A figura 1 descreve graficamente as relações e variáveis apresentadas.

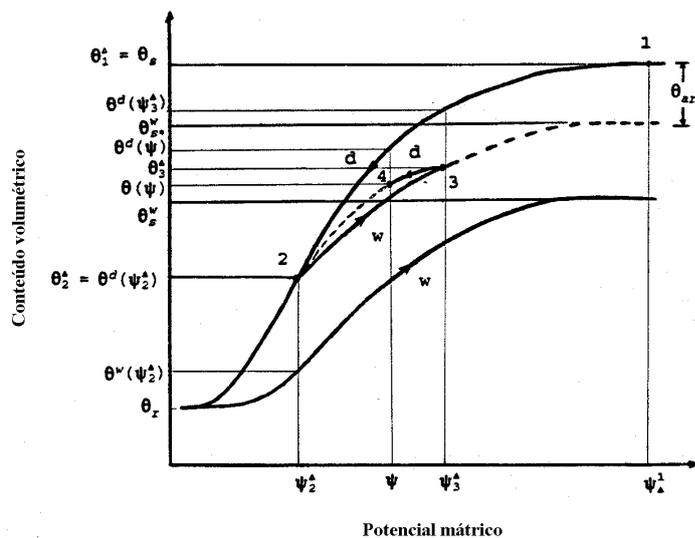


Figura 1 – Caminho de simulação hipotético, conforme modelo de histerese selecionado

Conforme Kool e Parker (1987), as relações obtidas são de natureza empírica e não se espera que descrevam muito precisamente o processo de aprisionamento de ar, mas, na falta de procedimentos mais rigorosos, elas fornecem uma aproximação utilizável. Sua grande vantagem é de não introduzir parâmetros adicionais, podendo ser incorporadas diretamente ao modelo de simulação de fluxo não-saturado disponível. Parker e Lenhard (1987) supõem que a equação (9) é aplicável a curvas secundárias de maior ordem associadas a uma curva primária especificada.

DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Conforme mencionado anteriormente, o modelo selecionado para simulação da histerese apresenta a desvantagem de necessitar o conhecimento de dois pontos de reversão anteriores, o que traz dificuldades para sua utilização com dados de campo. O algoritmo apresentado a seguir foi desenvolvido com a finalidade de estimar estes pontos de reversão e fornecer as condições iniciais necessárias para simulação.

Examinando a equação (3), é possível verificar que, para cada trecho de curva principal ou secundária em uma simulação, os dois pontos prévios de reversão são constantes. Assim, a equação (3) pode ser representada para um determinado trecho entre dois pontos de reversão consecutivos como:

$$\theta(\psi) = [\theta^p(\psi) - C1^{corda}]C2^{corda} + C3^{corda} = \theta^p(\psi)C2^{corda} + C4^{corda} \quad (10)$$

onde $C1^{corda}$, $C2^{corda}$, $C3^{corda}$ e $C4^{corda}$ são constantes para cada corda (trecho entre dois pontos de reversão consecutivos) durante uma simulação, conforme representado na figura 1. Se quaisquer dois pontos são conhecidos em uma corda, é possível calcular os valores de $C2^{corda}$ e $C4^{corda}$ e, a partir deles, pode-se obter os pontos prévios de reversão.. Se dois pontos quaisquer são conhecidos em uma curva secundária de embebição de primeira ordem, tal como a corda 2-3 na figura 1, é possível calcular $C2^{2-3}$ e $C4^{2-3}$. Aplicando a equação (10) ao ponto 2 na figura 3.1 tem-se:

$$\theta_2^\Delta = \theta^d(\psi_2^\Delta) = \theta^w(\psi_2^\Delta)C2^{2-3} + C4^{2-3} \quad (11)$$

Os valores de ψ_2^Δ e θ_2^Δ são obtidos resolvendo a equação (11).

Se dois pontos quaisquer são conhecidos em uma curva secundária de embebição de segunda ordem, tal como a corda 3-4 na figura 1, é possível calcular $C2^{3-4}$ e $C4^{3-4}$ e, quando ocorre o fechamento desta curva (ponto 2), obter:

$$\theta_2^\Delta = \theta^d(\psi_2^\Delta) = \theta^d(\psi_2^\Delta)C2^{3-4} + C4^{3-4} \quad (12)$$

Resolvendo a equação (12), obtém-se ψ_2^Δ e θ_2^Δ . Com estes valores, é possível determinar o valor de θ_s^w , usando as equações (8) e (9). $C2^{2-3}$ e $C4^{2-3}$ são calculados como:

$$C2^{2-3} = \frac{\theta_2^\Delta - \theta_s^w}{\theta^w(\psi_2^\Delta) - \theta_s^w} \quad (13)$$

e

$$C4^{2-3} = \theta_s^w(1 - C2^{2-3}) \quad (14)$$

Assim, no ponto 3:

$$\theta^d(\psi_3^\Delta)C2^{3-4} + C4^{3-4} = \theta^w(\psi_3^\Delta)C2^{2-3} + C4^{2-3} \quad (15)$$

Resolvendo a equação (15), são determinados os valores de ψ_3^Δ e θ_3^Δ .

As equações (11), (12) e (15) podem ser generalizadas por:

$$\theta^w(\psi_l^\Delta)C2^{2-3} - \theta^d(\psi_l^\Delta)C2^{3-4} + C4^{2-3} - C4^{3-4} = 0 \quad (16)$$

Admitindo-se curvas secundárias de até segunda ordem (máximo $l = 3$), as equações (13), (14) e (16) podem ser usadas para estimar os valores de ψ e θ nos pontos prévios de reversão, dados quaisquer dois pontos na corda. No algoritmo desenvolvido, a seqüência lógica seguida pode ser resumida como:

1. identificar se é uma curva de drenagem ou embebição, examinando os dois pontos conhecidos;
2. identificar se é uma curva primária ou secundária, comparando os dois pontos conhecidos com as curvas principais de drenagem e embebição;
3. em uma curva secundária, calcular os pontos prévios de reversão usando as equações (13), (14) e (16). A equação (16) é resolvida pela aplicação de técnica de Newton-Raphson.

TESTES DO MODELO NUMÉRICO

O modelo de histerese acima descrito foi testado usando dados de curvas experimentais de Parker e Lenhard (1987): curva principal de drenagem e curva secundária de primeira ordem de embebição para movimento de ar-água em um meio poroso arenoso e valores de parâmetros obtidos através de análise de regressão não linear por mínimos quadrados destes dados. Considerando a presença de erros experimentais e paramétricos, o programa de simulação de histerese funcionou muito bem na reprodução dos resultados experimentais obtidos por Parker e Lenhard (1987), conforme mostrado na tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do modelo de histerese aplicado a dados de Parker e Lenhard (1987)

Carga (cm)	Saturação (%)			Carga (cm)	Saturação (%)	
	Amostra 1	Amostra 2	Simulado		Amostra 3	Simulado
10.3	78	84	88	10.3	82	88
22.5	58	64	66	19.4	67	71
49.7	34	39	38	46.8	39	40
78.6	16	28	26	74.2	25	27
97.4	13	25	22	98.9	21	21
149.6	10	23	15	148.2	18	15
99.4	11	24	19	99.0	20	20
63.5	15	28	27	61.0	24	28
41.3	24	34	37	41.7	31	37
28.9	34	43	48	27.4	42	49
13.0	51	61	75	13.7	57	73

O algoritmo para estabelecimento das condições iniciais foi testado com dados de Parker e Lenhard (1987) e também com dados sintéticos, gerados com a finalidade de verificar a resposta do algoritmo para combinações de dados não avaliadas com os dados de literatura. Os dados sintéticos foram gerados utilizando a curva de retenção de Van Genuchten (equação 2), aceitando curvas secundárias de até segunda ordem e adotando os seguintes vetores de parâmetros:

- curva principal de drenagem:

$$\theta_s^d = 47,55 \%$$

$$\theta_r^d = 5,00 \%$$

$$\alpha^d = 0,17 \text{ cm}^{-1}$$

$$n^d = 1,40$$

- curva principal de embebição:

$$\theta_s^w = 46,49 \%$$

$$\theta_r^w = 5,00 \%$$

$$\alpha^w = 0,10 \text{ cm}^{-1}$$

$$n^w = 1,44$$

Os resultados, apresentados na tabela 2, mostram que modelo foi capaz de prever os valores de tensão e umidade nos pontos de reversão com boa precisão. Apenas um ponto prévio de reversão é apresentado para curvas de embebição primárias porque o outro ponto de reversão é, por definição, $(\psi, \theta) = (0, \theta_s^d)$.

Tabela 2 – Resultados do algoritmo de determinação das condições iniciais

Valores dos Pontos Conhecidos		Ordem da Curva secundária	Pontos de Reversão		Fonte dos Dados
1º ponto	2º ponto		Real	Calculado	
$\psi = 0,00$ cm $\theta = 41,71$ %	$\psi -4,00$ cm $\theta = 39,91$ %	segunda	$\psi = -7,00$ cm $\theta = 38,64$ % $\psi = 3,00$ cm $\theta = 41,71$ %	$\psi = -6,99$ cm $\theta = 38,65$ % $\psi = 2,94$ cm $\theta = 41,71$ %	dados sintéticos
$\psi = -4,00$ cm $\theta = 39,41$ %	$\psi = 0,00$ cm $\theta = 40,62$ %	primeira	$\psi = 3,00$ cm $\theta = 41,71$ %	$\psi = 2,94$ cm $\theta = 41,71$ %	dados sintéticos
$\psi = -10,00$ cm $\theta = 33,02$ cm	$\psi = -5,00$ cm $\theta = 34,86$ %	primeira	$\psi = -18,00$ cm $\theta = 30,77$ %	$\psi = -17,98$ cm $\theta = 30,78$ %	dados sintéticos
$\psi = -99,40$ cm S = 0,11	$\psi = -63,50$ cm S = 0,15	primeira	$\psi = -149,60$ cm S = 0,10	$\psi = -150,13$ cm S = 0,12	Parker e Lenhard
$\psi = -63,50$ cm S = 0,15	$\psi = -41,30$ cm S = 0,24	primeira	$\psi = -149,60$ cm S = 0,10	$\psi = -150,00$ cm S = 0,12	Parker e Lenhard
$\psi = -28,90$ cm S = 0,34	$\psi = -13,00$ cm S = 0,51	primeira	$\psi = -149,60$ cm S = 0,10	$\psi = -148,30$ cm S = 0,13	Parker e Lenhard

ψ = tensão mátrica

θ = conteúdo volumétrico de água

S = saturação

CONCLUSÕES

Um modelo de histerese em curvas de retenção de umidade do solo, incluindo efeitos de aprisionamento de ar, para simulação de fluxo não-saturado de água no solo, baseado naqueles apresentados por Kool e Parker (1987) e por Parker e Lenhard (1987) foi desenvolvido e testado. As curvas secundárias são calculadas por um procedimento empírico que redimensiona por interpolação linear as funções das curvas principais, garantindo o fechamento dos laços histeréticos secundários, e as curvas principais de drenagem e embebição podem ser descritas por qualquer modelo paramétrico, tal como as equações de Brooks-Corey (1964) ou Van Genuchten (1980).

Uma das principais vantagens do modelo adotado é sua simplicidade paramétrica, que permite sua fácil implementação a diversos modelos numéricos de fluxo de água no solo, sem requerer a especificação de novos parâmetros. Por outro lado, ele exige o conhecimento de dois pontos prévios de reversão, o que dificulta seu uso com dados de campo. Para resolver este problema, um algoritmo para estimar pontos prévios de

reversão foi desenvolvido, fornecendo as condições iniciais para simulação com o modelo de histerese.

O modelo de histerese e o algoritmo para determinação das condições iniciais foram testados com dados experimentais da literatura e também com dados sintéticos, apresentando boa precisão na reprodução dos dados originais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZIZ, K; SETARI, S. Petroleum reservoir simulation. Barking (Reino Unido): Applied Science Publishers, 1979.
- BROOKS, R.H.; COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. Hydrology Papers 3. Fort Collins (Estados Unidos): Colorado State University, 1964. 28p.
- JAYNES, D.B. Comparison of soil-water hysteresis models. Journal of Hydrology, Amsterdam, V.75, n.1/4, 1984, p.287-299.
- KALUARACHCHI, J.J.; PARKER, J.C. Effects of hysteresis with air entrapment on water flow in the unsaturated zone. Water Resources Research, Washington, V.23, n.10, 1987, p.1967-1976.
- KOOL, J.B; PARKER, J.C. Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties. Water Resources Research, Washington, V.23, n.1, 1987, p.105-114.
- KLUTE, A; HEERMANN, D.F. Soil water profile development under a periodic boundary condition. Soil Science, V.117, 1974, p.265-271.
- LAND, C.S. Calculation of imbibition relative permeability for two- and three-phase flow from rock properties. Transactions of the Society of Petroleum Engineers of AIME, V.243, 1968, p.149-156.
- MUALEM, Y. Prediction of the soil boundary wetting curve. Soil Science, V.137, n.12, 1984, p.379-390.
- PARKER, J.C.; LENHARD, R.J. A model for hysteretic constitutive relations governing multiphase flow. 1. Saturation-pressure relations. Water Resources Research, Washington, V.23, n.12, 1987, p.2187-2196.
- VAN GENUCHTEN, M.Th. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal, V.44, 1980, p.892-898.