

XXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

ANÁLISE DE INCERTEZAS EM CURVAS-CHAVE POR MEIO DE MODELAGEM BAYESIANA NO RIO SÃO FRANCISCO EM PIRAPORA

Luan Vieira ¹; Júlio Sampaio ²; Veber Costa ³ & Julian Eleutério ⁴

Palavras-Chave – Curva-chave; Modelagem Bayesiana, BaRatin.

INTRODUÇÃO

Análises de incertezas associadas a vazões de rios são de grande importância para estudos e ações relacionados à gestão de recursos hídricos, como o controle de enchentes, previsão de eventos extremos e dimensionamento de obras hidráulicas (LE COZ, 2012). Ao se tratar de eventos extremos, vale destacar a relevância dessas análises na estimativa de quantis de vazões associadas a diferentes períodos de retorno, que servem como base para o gerenciamento de riscos.

Descargas de rios são frequentemente estimadas por meio de relações de cota-descarga, ou seja, pela conversão de séries temporais de cotas coletadas de uma estação de medição em séries temporais de vazão, utilizando curvas-chave (REITAN e PETERSEN-ØVERLEIR, 2009). Essas relações são determinadas a partir de resultados de medições, apoiadas em análises de parâmetros do escoamento.

Na literatura são apresentadas algumas técnicas de análises de incertezas que já foram aplicadas a curvas-chave, como métodos de regressão, verossimilhança e inferência Bayesiana (LE COZ, 2012). Quando negligenciadas, as incertezas decorrentes de erros em curvas-chave podem causar estimativas tendenciosas e passíveis de má interpretação (LANG *et al.*, 2010). A abordagem Bayesiana, vertente de inferência foco deste trabalho, tem sido frequentemente utilizada para estimar intervalos de incertezas e distribuições preditivas de quantis de vazão (STEINBAKK *et al.*, 2016; VRUGT, 2016). Um exemplo de aplicação consiste no modelo baseado em abordagem Bayesiana desenvolvido por Sikorska e Renard (2017) para representar probabilisticamente erros da curva-chave e seu impacto nas estimativas de vazões de um modelo hidrológico. No referido trabalho, as incertezas paramétricas e estruturais foram representadas explicitamente tanto no modelo hidrológico quanto no modelo de curva-chave. Especificamente para a curva-chave, o modelo de erro estrutural foi descrito seguindo o método Bayesiano BaRatin (LE COZ *et al.*, 2014), que será também objeto de aplicação no contexto desse trabalho.

Garcia *et al.* (2020) mencionam que o uso de modelos Bayesianos na estimativa de incertezas em curvas-chave contribui na agregação de conhecimentos e na preservação do realismo físico na relação cota-descarga. Le Coz *et al.* (2014) consideram que a inferência Bayesiana é uma abordagem promissora para estimar curvas-chave mais precisas e fornecer uma estimativa rigorosa de incertezas associadas, sendo uma das maiores vantagens de sua aplicação a avaliação quantitativa de controles hidráulicos por meio da tradução do conhecimento hidráulico em distribuições de probabilidade *a priori*, o que pode proporcionar predições mais confiáveis, principalmente nos trechos de extrapolação da curva.

1) Doutorando pela Universidade Federal de Minas Gerais. E-mail: luan.msv@gmail.com

2) Mestre pela Universidade Federal de Minas Gerais. E-mail: juliolobosampaio@gmail.com

3) Professor adjunto do Departamento de Engenharia Hidráulica e Recursos Hídricos da UFMG. E-mail: veber@ehr.ufmg.br

4) Professor adjunto do Departamento de Engenharia Hidráulica e Recursos Hídricos da UFMG. E-mail: julian.eleuterio@gmail.com

Hall (2003), Le Coz (2012), Steinbakk *et al.* (2016) e Garcia *et al.* (2020) apontaram incertezas relacionadas às curvas-chave, como as epistêmicas, que surgem a partir do conhecimento limitado e incompleto do sistema e da dificuldade de compreendê-lo e descrevê-lo, as incertezas estruturais, que decorrem da incapacidade do modelo em expressar uma relação real de cota-descarga (por exemplo, pelo conhecimento incorreto do sistema hidráulico); as incertezas paramétricas, que se manifestam em função do tamanho das amostras utilizadas na inferência, e as incertezas decorrentes de erros de medição, como os erros instrumentais e técnicas de medição. Essas incertezas são influenciadas por diversos efeitos, como pela ocorrência de remansos, pela rugosidade do leito, pela mudança geométrica da seção hidráulica, erosão, mobilidade de materiais e deposição de sedimentos.

A curva-chave é fortemente influenciada pelas condições hidráulicas de referência. No momento que o escoamento se desvia do regime de referência, podem ocorrer erros importantes na medida de vazão e uma nova curva-chave deve ser estabelecida para o novo regime (LE COZ, 2012). Os controles hidráulicos podem variar sua influência no escoamento do rio em função das cotas, ou seja, seu papel pode mudar para vazões baixas e altas. Quando são identificados controles hidráulicos de canais, o escoamento é principalmente regulado pela rugosidade do canal e pela geometria da seção. Em escoamentos não uniformes, as condições de montante e jusante podem influenciar a relação cota-descarga e o escoamento é influenciado pela geometria e/ou estado hidráulico onde o escoamento se torna crítico, e nestes casos, as perdas de carga podem ser contabilizadas por um coeficiente de descarga (SIKORSA E RENARD, 2016).

Dessa forma, na maioria das vezes as curvas-chave são divididas em segmentos, em função de mudanças das relações cota-descarga. Nos rios isso pode ocorrer por inúmeras razões, sendo uma delas a mudança do controle hidráulico. Os pontos de mudança são geralmente escolhidos conforme a análise gráfica de medições disponíveis ou conhecimento local sobre características físicas da seção. Assim, são definidos parâmetros para a equação da curva-chave para cada segmento do sistema hidráulico (REITAN e PETERSEN-ØVERLEIR, 2009).

Uma importante fonte de incerteza inclui métodos para extrapolar informações da curva-chave. Essas incertezas podem ser grandes, uma vez que não é possível conhecer a quantidade de segmentos além dos observados (LANG *et al.*, 2010). Em razão de questões como essa, Le Coz *et al.* (2014) desenvolveram um método de análise bayesiana com embasamento hidráulico, o BaRatin. Esse método permite a construção de uma função de versossimilhança condicional com base em dados de medições e usa condições de controle hidráulico para definir distribuições de probabilidade informativas *a priori* para os parâmetros do modelo de regressão da curva-chave.

Nesse contexto, o objetivo desse trabalho é analisar incertezas paramétricas e estruturais na curva-chave por meio do método Bayesiano BaRatin (LE COZ *et al.*, 2014), e apresentar o comportamento *a posteriori*, juntamente com os resíduos da modelagem em uma seção do Rio São Francisco localizada no município de Pirapora (MG).

MATERIAL E MÉTODOS

A análise de incertezas da curva-chave foi realizada em uma seção do rio São Francisco, na cidade de Pirapora, estado de Minas Gerais. A estação fluviométrica 41135000 de Pirapora Barreiro (17°22'9.12"S e 44°56'35.16"W), operada pelo CPRM, localizada logo a jusante da ponte BR-365, com área de drenagem de 62.200 km², foi utilizada como referência nas análises (Figura 1). Um trecho fluvial que vai desde a foz do rio Abaeté até as corredeiras do município de Pirapora, foi considerado na modelagem hidráulica para avaliação de controles hidráulicos.

A sessão em análise se encontra em um trecho de declividade de fundo de canal média de 0,00028 m/m, caracterizado pela predominância de regimes de escoamento fluviais e se encontra aproximadamente 1,5 km a montante de um trecho caracterizado por corredeiras (com declividades

fortes) (Figura 2).

Figura 1- Localização do trecho analisado do Rio São Francisco

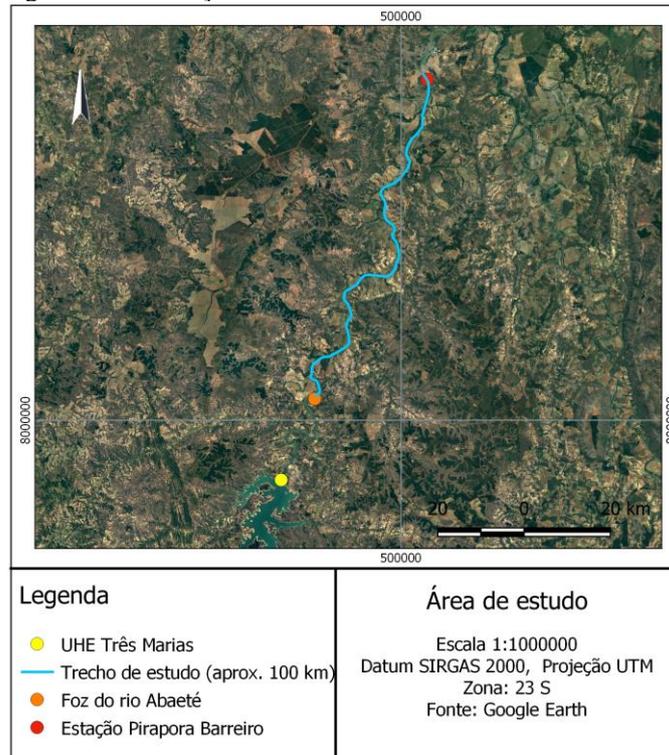
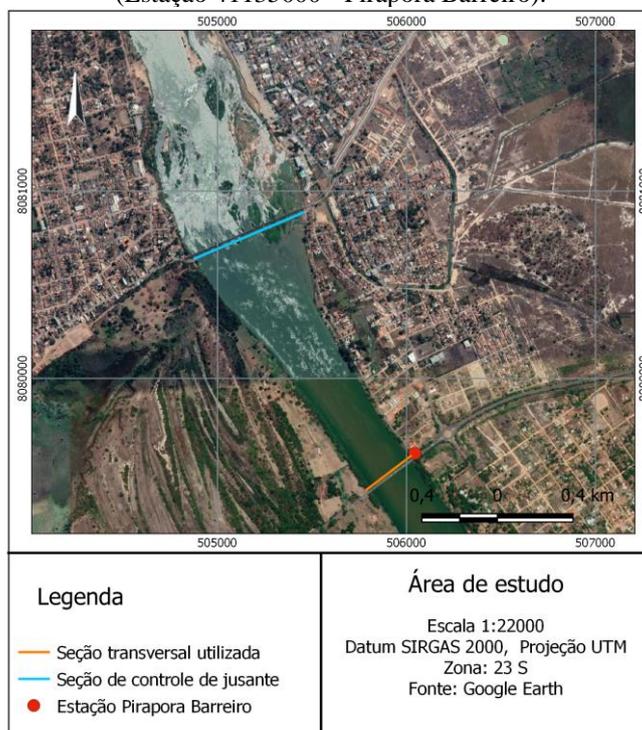


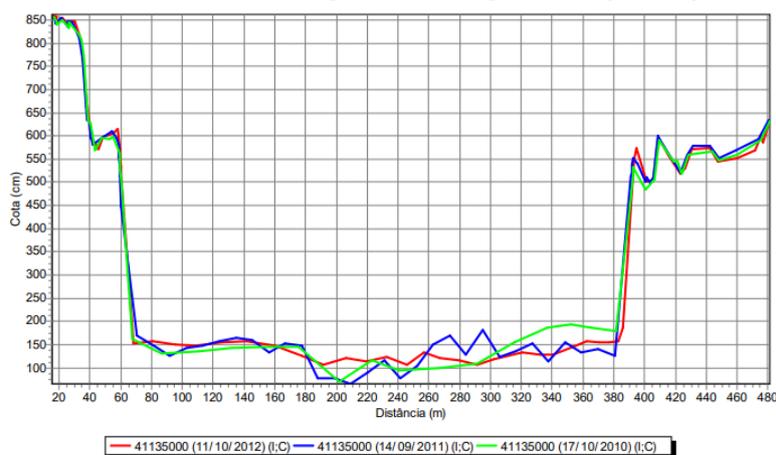
Figura 2 – Localização da seção transversal objeto da avaliação de incertezas da curva-chave (Estação 41135000 - Pirapora Barreiro).



Para a estação analisada, foram coletados os dados de resumo de descarga com cotas e vazões instantâneas entre os anos de 1968 e 2014, que serviram de informação para atualização e calibração do esquema de inferência Bayesiana. O perfil transversal da seção demonstra um canal aproximadamente retangular com largura da calha principal em torno de 330 m. Na Figura 3 são

apresentados os três levantamentos de seção mais atuais disponibilizados no portal HIDROWEB para estação, utilizados para a avaliação de possíveis segmentos da curva-chave.

Figura 3- Perfis transversais da estação na localização da estação Pirapora Barreiro



Fonte: ANA, 2020

No BaRatin, abordagem Bayesiana adotada nessa pesquisa, a construção da função de verossimilhança condicional com base em dados de medições se dá com base em condições de controle hidráulico utilizadas para definição de distribuições de probabilidade *a priori* informativas para os parâmetros do modelo de regressão da curva-chave, geralmente expressas em forma de equação de potência (Equação 1) (GARCIA *et al.*, 2020). A partir disso, são determinadas curvas-chave mais realistas e as incertezas estruturais, de medição e paramétricas podem ser quantificadas por meio de um modelo de erro (LE COZ *et al.*, 2014).

$$q = a(h - h_o)^c \quad (1)$$

na qual h é o nível da água correspondente à vazão Q , h_o é o nível para a vazão nula e c é uma constante que varia em função das características do canal.

Essa função é definida pela sucessão de controles hidráulicos que governam a relação de cota-descarga. Para o desenvolvimento do modelo BaRatin, foi assumido que em dado instante t , numa seção transversal do rio, a vazão predita pela curva-chave, \hat{q}_t , é representada pela Equação 2 (GARCIA *et al.*, 2020):

$$\hat{q}_t = f(h_t, \theta) \quad (2)$$

na qual h_t é a cota associada a \hat{q}_t e θ é o vetor que representa os parâmetros da curva-chave.

A vazão (\hat{q}_t) também pode ser descrita com um erro associado, conforme a Equação 3.

$$\hat{q}_t = q_t + e_t^{RC}(\beta) \quad (3)$$

na qual: q_t é a vazão real (desconhecida) para um instante t e $e_t^{RC}(\beta)$ é o termo que representa o erro associado à incapacidade do modelo de traduzir perfeitamente a relação cota-descarga.

Dentre as principais premissas adotadas no modelo temos que os erros são independentes e que as incertezas epistêmicas podem ser tratadas como aleatórias. O modelo de erro estrutural adotado neste trabalho é o mesmo proposto por Garcia *et al.* (2020), o qual se assemelha a uma curva de energia específica e foi desenvolvido para permitir mudanças na parte inferior da curva-chave, e para manter a relação linear entre o desvio padrão e as descargas simuladas em baixos e altos fluxos (Equação 4).

$$e_t^{RC}(\beta) \sim N\left(0, \left(\beta_1 \hat{q}_t + \frac{\beta_2}{\hat{q}_t^2}\right)^2\right) \quad (4)$$

na qual β_1 e β_2 são parâmetros inferidos a partir dos dados que visam representar a heterocedasticidade dos resíduos.

Considerando o modelo de erro da Equação 4, combinado com erros de medição, a descarga pode ser finalmente representada de acordo com a Equação 5.

$$\tilde{q}_t = \hat{q}_t - e_t^{RC}(\beta) + e_t^{GP}(\gamma) \quad (5)$$

na qual $e_t^{GP}(\gamma)$ expressa os erros para cada ponto de medição, modelados como variáveis Gaussianas, (ambos modelos de erros são Gaussianos, e sua soma também compreendem distribuições normais), sendo γ um vetor de parâmetros, tratados com média 0 e desvio padrão (δ_t) uma função da vazão medida.

A função de verossimilhança é representada por uma distribuição Normal, conforme a Equação 6.

$$p(\tilde{q}|\theta, \beta, \tilde{h}) = \prod_{i=1}^M N(\tilde{q}_{ti}; \hat{q}_{ti} \left(\beta_1 \hat{q}_{ti} + \frac{\beta_2}{\hat{q}_{ti}^2}\right) + \delta_{ti}^2) \quad (6)$$

A distribuição *a posteriori* dos parâmetros do modelo é representada pela Equação 7.

$$p(\theta, \beta | \tilde{q}, \tilde{h}) \propto p(\tilde{q}|\theta, \beta, \tilde{h}) \cdot p(\theta, \beta) \quad (7)$$

Com intuito de verificar a influência da corredeira localizada a jusante da seção de análise e identificar possíveis controles hidráulicos, foram realizadas simulações com o modelo hidrodinâmico unidimensional HEC-RAS 4.1, em regime permanente. A geometria do modelo contou com 22 seções transversais no trecho da Figura 1 e a definição dos coeficientes de rugosidade seguiram os mesmos valores utilizados por Rocha *et al.* (2019).

A partir dos resultados de simulação obtidos por meio da modelagem hidrodinâmica e do perfil longitudinal (Figura 4), foram inferidos dois controles hidráulicos na estação 41135000: escoamentos mais baixos governados por um controle crítico localizado na corredeira a jusante da seção analisada; e para cotas mais elevadas, identificou-se que haveria uma mudança no controle hidráulico para um controle de canal, na medida que se observaria extravasamento para a planície de inundação no trecho a jusante da seção.

Dessa forma, a curva-chave foi limitada a uma lei de potência de dois segmentos, e sua configuração foi desenvolvida de acordo com a Equação 8.

$$Q = \begin{cases} a_1(h_t - b_1)^{c_1} & \text{se, } k_1 < h_t \leq k_2 \\ a_2(h_t - b_2)^{c_2} & \text{se, } k_2 < h_t \end{cases} \quad (8)$$

na qual k é a cota de ativação de cada controle hidráulico.

Os parâmetros b_1 e b_2 foram inferidos de maneira a garantir a continuidade da curva-chave. Nesse caso, as relações entre os parâmetros k e b são dadas pela Equação 9 (SIKORSA E RENARD, 2017):

$$b_1 = k_1 \text{ e } b_2 = k_2 - \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot (k_2 - b_1)^{c_1}\right)^{\frac{1}{c_2}} \quad (9)$$

Considerando o controle 1 (controle crítico), o parâmetro c_1 foi definido igual a 1,5 de acordo com Sikorsa e Renard (2017), considerando que a corredeira funciona como um vertedor retangular. O parâmetro a_1 se relaciona com a largura do canal e o coeficiente de descarga (foi de acordo com a Equação 10). A curva-chave está representada na Equação 11.

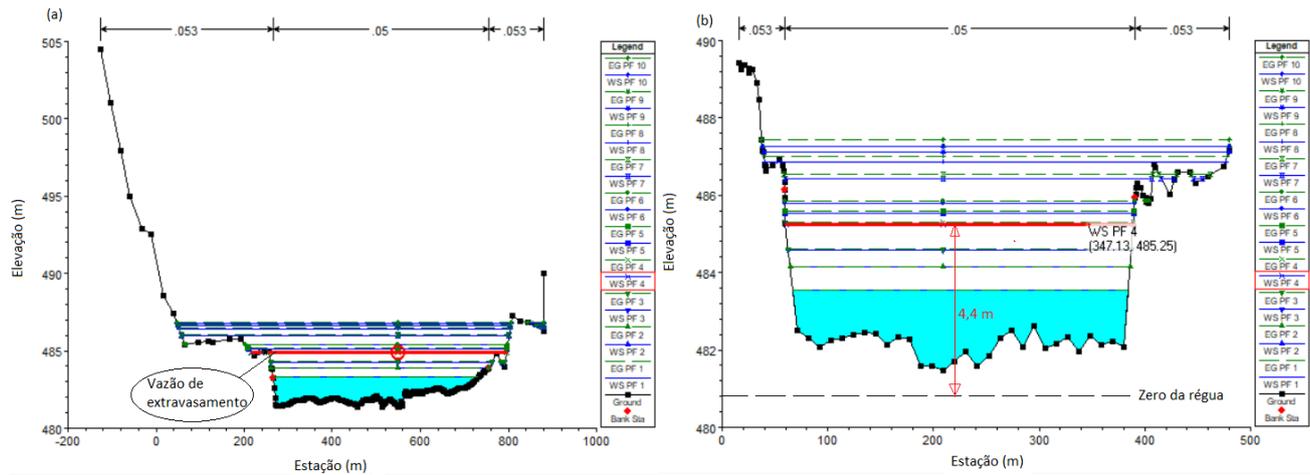
$$q = C_r \cdot B_w \sqrt{2g} \quad (10)$$

$$Q = C_r \cdot B_w \sqrt{2g} (h - b)^c \quad (11)$$

na qual B_w é a largura do canal e C_r é o coeficiente de descarga teórico.

A cota de ativação k_2 foi estimada com base em análises de perfis transversais do canal, tomando como referência a vazão de extravasamento da calha da seção da corredeira (aproximadamente 1.000 m³/s – PF 4) e a altitude do zero da régua com relação ao nível do mar na seção de análise (480,814 m) (Figura 4).

Figura 4- Perfis transversais com resultados da simulação hidráulica para diferentes vazões na seção de controle de jusante (a) e na seção de análise da curva-chave (b)



As distribuições *a priori* para os parâmetros k e c foram assumidas como modelos Gaussianos, os quais são especificados como $k_2 \sim N(4,4; 0,5^2)$ e $c_1 \sim N(1,5; 0,025^2)$. O parâmetro a foi estimado a partir das *prioris* da largura do canal (B_w) e do coeficiente de descarga (C_r). Sendo a primeira especificada como uma distribuição uniforme $B_w \sim U(620; 770)$, e a segunda, como um modelo Gaussiano $C_r \sim N(0,4 \pm 0,1)$ (SIKORSA E RENARD, 2017). A incerteza de medição para o parâmetro da vazão foi considerada igual à $\pm 7\%$ da vazão (desvio padrão adotado para representar o erro de medição por molinete) (LE COZ *et al.*, 2014).

Para o segundo controle (controle de canal), o parâmetro a varia em função de B_w (largura da seção transversal), n (coeficiente de Manning) e S (declividade média do trecho, neste caso considerada suave e com valor aproximado de 0,00028 m/m), representada pela equação de Manning-Stricker (premissa adotada para escoamento Uniforme), conforme a Equação 12. A curva-chave está representada na Equação 13.

$$a = \frac{1}{n} B_w \sqrt{S} \quad (12)$$

$$Q = \frac{1}{n} B_w \sqrt{S} (h - b)^{5/3} \quad (13)$$

A distribuição *a priori* para o coeficiente de Manning foi a $LN(0,065; 0,1^2)$ (USBR, 1986). A largura do canal e a declividade foram representadas por uma distribuição uniforme, com limites iguais a 297–363 m e 0,00025 – 0,00031 m/m respectivamente. Para os parâmetros β_1 e β_2 , foram utilizadas distribuições *a priori* não informativas. A distribuição *a priori* de β_1 foi uma normal centrada em zero com desvio padrão igual a 1 e truncada em zero. A distribuição de β_2 foi uma distribuição gama inversa com parâmetros de escala e forma iguais a 0,001.

Em ambos os casos, a variância do parâmetro a ($u_c^2(a)$) foi estimada por meio da propagação da incerteza a partir da expansão da série de Taylor de primeira ordem (JCGM 100, 2008).

Como recomendado por Le Coz *et al.* (2014), o valor adotado para c na Equação 1 foi igual a $5/3$, considerando-se a premissa de um canal retangular de grande largura em regime de escoamento permanente e uniforme. O valor do coeficiente de rugosidade de Manning foi de 0,065, estimado por meio do método de Cowan e imagens da área. Na Figura 5 são apresentadas as imagens utilizadas para a definição dos valores dos coeficientes de Manning da seção na qual se localiza a estação 41135000.

Figura 5- Margem esquerda (a) e margem direita da seção (b, c)



Fonte: ROCHA (2019)

A atribuição dos valores para a rugosidade do BaRatin foi prescrita de acordo com Baptista e Lara (2018), considerando as variações na superfície. Na margem esquerda foi verificada uma área mais homogênea, com predominância de vegetação de baixo e médio porte. Na margem direita, além das vegetações de baixo e médio porte, foi observada a presença de solo arenoso. Diferenciais como a presença da ponte BR-365 foram respeitados no cálculo.

A inferência Bayesiana foi realizada com auxílio do pacote estatístico *RStan* (Stan Development Team 2020) no software R. Esse pacote realiza a inferência da distribuição conjunta *a posteriori* por amostragens MCMC (STAN, 2020). Nesta pesquisa foram definidas simulações com a realização de 4 cadeias e 2.000 iterações cada uma, sendo o *warm-up* igual a metade das iterações de cada cadeia. A convergência do modelo foi avaliada por meio da estatística \hat{R} , para a qual um valor menor que 1,1 é preconizado (Gelman *et al.*, 2013).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Estatísticas *a posteriori* associadas aos parâmetros da curva-chave são mostradas na Tabela 1. A estimativa pontual da transição entre os tramos da curva-chave (k_2) inferida a partir do modelo Bayesiano foi de 2,05 m, e seu intervalo de credibilidade de 95% foi de 1,93 a 2,18. O intervalo de credibilidade dessa variável foi relativamente estreito, reflexo da distribuição *a priori* mais informativa eliciada para essa variável e da identificação da transição entre os tramos da curva-chave a partir dos dados pelo modelo hidráulico.

Tabela 1 - Resumo das distribuições *a posteriori* da curva-chave e do modelo de erro

Parâmetro	Media	Desvio Padrão	95% HPD
a_1	609,22	27,34	552,56; 662,35
b_1	0,93	0,02	0,87; 0,99
c_1	1,47	0,02	1,42; 1,51
a_2	620,35	26,58	566,56; 672,53
b_2	0,96	0,03	0,9; 1,02
c_2	1,74	0,02	1,7; 1,79
k_2	2,05	0,06	1,93; 2,18
β_1	0,004	0,003	0; 0,01
β_2	618010,5	258801,91	98,69; 1159727,69
n	0,068	0,02	0,03; 0,11

Parâmetro	Media	Desvio Padrão	95% HPD
S	0,002	0,0001	0,002; 0,003
B_w	678,40	39,41	622,24; 754,07

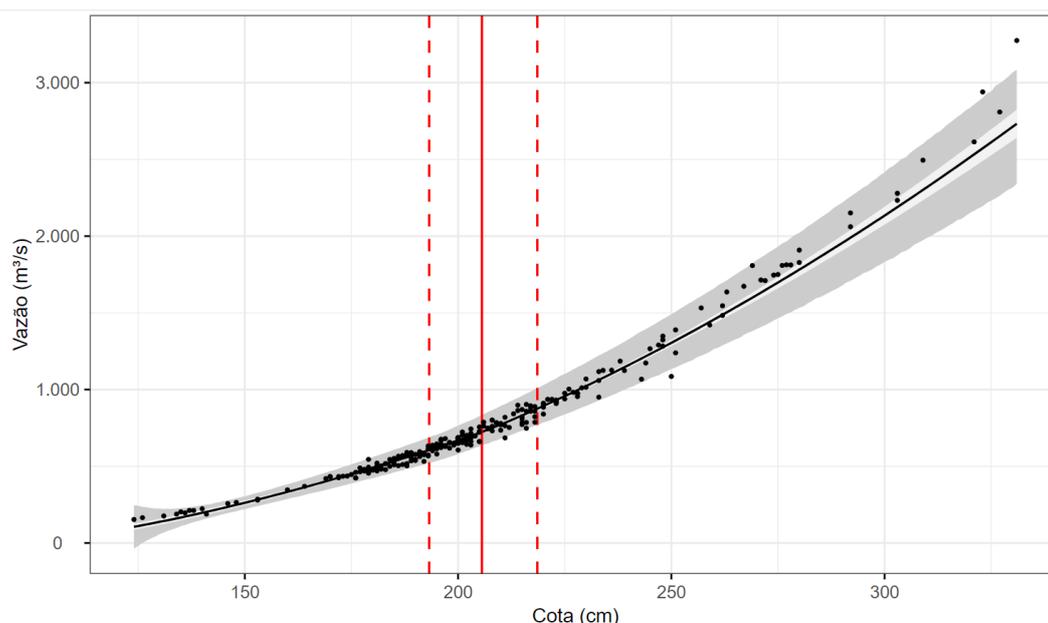
Nota: HPD é o maior intervalo de densidade *a posteriori* (intervalo de 95% de credibilidade)

A curva-chave inferida é ilustrada na Figura 6. As estimativas medianas da curva-chave apresentaram boa aderência às medições de descarga para cotas baixas e médias, porém houve subestimação das vazões associadas às cotas mais elevadas. Em termos de estimativas pontuais, melhores desempenhos foram observados, portanto, para cotas baixas e médias.

Em relação à quantificação da incerteza da curva-chave, percebe-se que na cauda inferior da curva-chave, assim como em sua porção média, o modelo foi capaz de fornecer intervalos de credibilidade realísticos que englobaram todas as observações. Ademais, nota-se que para menores vazões, em função da estrutura de erro híbrida adotada, há um aumento do intervalo de credibilidade condizente com o aumento da incerteza para essa faixa de cotas. Para maiores vazões, o intervalo de credibilidade foi amplo, refletindo a grande incerteza associada às maiores cotas.

Os resultados sugerem que, apesar da identificação de dois tramos para as curvas-chave baseadas nas características da seção e nas simulações realizadas, pode haver um erro na especificação do modelo na medida em que há um deslocamento da curva-chave das observações para cotas maiores. Uma relação mais complexa de controle hidráulico do que a conjecturada pode ser a causa desse fato e possíveis erros foram corrigidos pelo modelo BaRatin. Com efeito, para seções complexas como a estudada, a identificação dos controles hidráulicos pode ser uma tarefa desafiadora na especificação do modelo. Não obstante, apesar do decaimento do ajuste para maiores vazões, o modelo foi capaz de englobar a maioria das observações, mostrando ser uma ferramenta útil na quantificação de incertezas.

Figura 6- Estimativa pontual da curva-chave em linha sólida preta e seu intervalo de credibilidade para a incerteza paramétrica (cinza claro) e incerteza total (cinza escuro). A estimativa pontual de k_2 e seu intervalo de credibilidade são ilustrados pela linha vermelha sólida e pontilhada, respectivamente.



CONCLUSÕES

Neste artigo, as incertezas estruturais e paramétricas da curva-chave foram analisadas e representadas probabilisticamente, por meio de um método de cunho Bayesiano, o BaRatin. O modelo desenvolvido levou em consideração dois segmentos separados em função da cota esperada de

ativação resultante da mudança de controle hidráulico no trecho do rio da cidade de Pirapora – MG. A quantificação de incertezas foi realizada para os parâmetros da curva-chave, considerando o intervalo entre 2,5 e 97,5% de credibilidade. Por fim, os resultados indicaram que o intervalo de incerteza total abrangeu a maioria dos dados de vazão, o que sugere adequação do modelo e intervalos de credibilidade mais realistas. Como recomendação, orienta-se que sejam realizados estudos com análises mais precisas em torno da identificação de controles hidráulicos e cotas de ativação, além de avaliações mais profundas sobre valores extremos da curva, verificando possíveis relações com outros tramos da curva-chave.

REFERÊNCIAS

- BAPTISTA, M. B., LARA, M. M. Fundamentos de engenharia hidráulica. 4 ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2016.
- GARCIA, R.; COSTA, V.; SILVA, F. (2020). Bayesian Rating Curve Modeling: Alternative Error Model to Improve Low-Flow Uncertainty Estimation. *Journal of Hydrology*, v. 25, n. 5.
- GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S.; DUNSON, D. B.; VEHTARI, A.; RUBIN, D. B. (2013). *Bayesian Data Analysis*. Ed. 3, Chapman and Hall/CRC.
- LANG, M., K. POBANZ, B. RENARD, E. RENOUF, AND E. SAUQUET. (2010). Extrapolation of rating curves by hydraulic modelling, with application to flood frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal–Journal des Sciences Hydrologiques*, v. 55, n. 6, pp. 883-898.
- LE COZ, J. (2012). *A literature review of methods for estimating the uncertainty associated with stage-discharge relations*. Geneva: World Meteorological Organization.
- LE COZ, J.; RENARD, B.; BONNIFAIT, L.; BRANGER, F.; BOURSICAUD, R. LE. (2014) Combining hydraulic knowledge and uncertain gaugings in the estimation of hydrometric rating curves: A Bayesian approach. *Journal of Hydrology*, v. 509, pp. 573-587.
- PINHEIRO, R. V.; NAGUETTINI, M.; PALMIER, L. R. (2019). Estimação de incertezas na modelagem hidrodinâmica por meio de técnicas Bayesianas. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*. v. 24.
- REITAN, T.; A. PETERSEN-ØVERLEIR. (2009). “Bayesian methods for estimating multi-segment discharge rating curves.”. 23 (5): 627–642. <https://doi.org/10.1007/s00477-008-0248-0>. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, v. 23, n. 5, pp. 627-642.
- ROCHA, V, B, P. (2019). Quantificação de incertezas associadas a variáveis intervenientes na modelagem hidrodinâmica por meio de métodos bayesianos. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos.
- SIKORSKA, A. E.; RENARD, B. (2017). Calibrating a hydrological model in stage space to account for rating curve uncertainties: general framework and key challenges. *Advances in water resources*, v. 105, pp. 51-66.
- STAN DEVELOPMENT TEAM, 2020. *RStan: the R interface to Stan*. Pacote do R versão 2.21.2. Disponível em <http://mc-stan.org/>.

STEINBAKK, G. H.; THORARINSDOTTIR, T. L.; REITAN, T.; SCHLICHTNG, L.; HØLLELAND, S.; ENGELAND, K. (2016). Propagation of rating curve in design flood estimation. *Water Resour. Res.* v. 52, n. 9, pp. 6897 – 6915.

USBR - US Army Corps of Engineers (1986). Hydrologic Engineering Center. Accuracy of Computed Water Surface Profiles.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPQ, à FAPEMIG e à UFMG pelo amparo concedido para o desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao tema.