

XXIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

APLICAÇÃO DO MODELO GLM NO RESERVATÓRIO DO PASSAÚNA

Gabriela Gomes Nogueira Sales^{1}; Mayra Ishikawa² & Tobias Bleninger³*

RESUMO – O conhecimento do regime térmico de reservatórios é imprescindível para a compreensão dos processos de transporte das grandezas escalares e, conseqüentemente, da qualidade da água do corpo hídrico. Desse modo, foi realizado nesse trabalho a simulação do modelo unidimensional GLM (*General Lake Model*) no reservatório do Passaúna (PR), de março de 2018 à fevereiro de 2019. A calibração do modelo se deu ajustando o fator de correção da velocidade do vento e as espessuras mínimas e máximas das camadas. Para os demais parâmetros e coeficientes com definições físicas já estabelecidas, foram atribuídos valores recomendados (*default*) por Hipsey *et al.* (2019). O modelo conseguiu representar satisfatoriamente a temperatura na coluna d'água do reservatório em estudo. O erro médio absoluto entre os resultados do modelo e medições realizadas por termistores ficaram entre 0,47°C e 0,74°C, que estão de acordo com valores encontrados na literatura. Foi verificado também a estabilidade da estratificação térmica com o cálculo do Número do Lago e da Estabilidade de Schmidt, constatando uma maior instabilidade no período mais frio, com a ocorrência de mistura entre as camadas. Um gradiente térmico mais acentuado foi observado nos meses de março e abril de 2018, em concordância com a classificação do reservatório como monomítico quente.

ABSTRACT – The knowledge of the thermal regime of reservoirs is essential for understanding the transport processes of the scalar quantities and, consequently, the water quality of the water body. Thus, the simulation of the GLM (*General Lake Model*) model was performed in the Passaúna reservoir (PR), from March 2018 to February 2019. The calibration of the model was done by adjusting the wind speed correction factor and minimum and maximum layer thicknesses. For the other parameters and coefficients with already established physical definitions, were assigned recommended values (*default*) by Hipsey *et al.* (2019). The model was able to satisfactorily represent the temperature in the water column of the reservoir under study. The absolute mean error between the model results and thermistor measurements was between 0.47°C and 0.74°C, which is in agreement with values found in the literature. It was also verified the stability of the thermal stratification with the calculation of the Lake Number and Schmidt Stability, noting a greater instability in the colder period, with the occurrence of mixing between the layers. A more pronounced thermal gradient was observed in the months of March and April of 2018, in agreement with the classification of the reservoir as warm monomictic.

Palavras-Chave – Reservatórios, modelagem de transporte de calor, *General Lake Model* (GLM).

^{1*}) Afiliação: Mestranda, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (UFPR), e-mail: gabriela.gns94@gmail.com.

²⁾ Afiliação: Doutoranda, *Institute for Environmental Sciences, University of Koblenz-Landau, Landau, Germany*, e-mail: ishikawa@uni-landau.de

³⁾ Afiliação: Professor do Departamento de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná (UFPR), e-mail: bleninger@ufpr.br.

* Autor Correspondente.

INTRODUÇÃO

O manejo adequado de reservatórios, isto é, a manutenção de uma boa qualidade e quantidade de água, requer a compreensão dos complexos e dinâmicos processos que neles ocorrem (Cunha *et al.*, 2011). Um parâmetro importante no estudo desses sistemas é a temperatura, já que afeta a densidade da água e, conseqüentemente, altera os regimes de transporte de escalares do corpo hídrico. Variações na concentração e distribuição dessas grandezas, como oxigênio dissolvido e nutrientes, por sua vez, acarretam em mudanças na limnologia do ecossistema aquático como um todo (Esteves, 2011).

O uso da modelagem matemática configura-se assim como uma importante ferramenta, em particular modelos unidimensionais (1D) que simulam perfis térmicos, já que os gradientes de temperatura na vertical são predominantes em reservatórios (Henderson-Sellers, 1984). A maioria dos processos biogeoquímicos com efeitos de estratificação química são fortemente correlacionados à estratificação térmica. Os modelos 1D têm apresentado amplo uso devido à possibilidade de estudos de diferentes cenários e longos períodos de simulação, com baixo custo computacional e requisitos mínimos de calibração (Bruce *et al.*, 2018; Hipsey *et al.*, 2019). Segundo Polli (2014), alguns modelos já conhecidos e amplamente utilizados na literatura internacional são DYRESM (Imerito, 2007), SIMSTRAT (Peeters *et al.*, 2002; Goudsmit *et al.*, 2002) e FLake (Mirinov, 2003).

Outro modelo unidimensional adotado em estudos mais recentes (Yao *et al.*, 2014; Fenocchi *et al.*, 2017; Bueche *et al.*, 2017; Bruce *et al.*, 2018) e escolhido para ser usado nesse trabalho é o *General Lake Model - GLM* (Hipsey *et al.*, 2019; <http://aed.see.uwa.edu.au/research/models/GLM/>), um modelo hidrodinâmico de código aberto. Foi desenvolvido em 2012 pela *Global Lake Ecological Observatory Network* (GLEON, 2019), uma rede de pesquisadores que visam compreender o funcionamento de lagos e reservatórios e como variam em resposta a mudanças no clima e uso da terra.

O GLM simula o balanço hídrico e a estratificação térmica e química vertical de reservatórios, considerando a mistura, a troca de calor e substâncias dissolvidas e o efeito de vazões e concentrações de entrada e saída. O cálculo do balanço de energia da superfície é formado pelos fluxos de radiação de ondas curtas e ondas longas, juntamente com os fluxos de calor sensíveis e evaporativos, que determinam o resfriamento e aquecimento da água. O modelo adota uma estrutura de camadas lagrangeana flexível (Imberger e Patterson, 1981), que ajusta as espessuras das camadas dinamicamente pela contração e

expansão, regulando também o número delas ao longo da simulação para manter propriedades homogêneas dentro de uma mesma camada (Hipsey *et al.*, 2019).

O objetivo desse trabalho foi aplicar o modelo GLM no reservatório do Passaúna, localizado no estado do Paraná, para avaliar o seu comportamento térmico e períodos de estratificação em comparação com medições contínuas. Foi realizado também o cálculo de índices físicos para uma melhor descrição do grau de estabilidade da estratificação térmica do corpo d'água.

MATERIAIS E MÉTODOS

A escolha da área de estudo se deu no âmbito do projeto MuDak (*Multidisciplinary Data Acquisition as Key for a Globally Applicable Water Resource Management*, <https://www.mudak-wrm.kit.edu/>), uma parceria entre universidades alemãs e brasileiras e empresas de saneamento e gestão de reservatórios, com o intuito de estudar alternativas otimizadas de gerenciamento de recursos hídricos.

Área de estudo

O reservatório do Passaúna, formado em 1990, está localizado na zona oeste da Região Metropolitana de Curitiba (RMC) e inserido na bacia hidrográfica do rio Passaúna, entre os paralelos 25° 26' – 25° 32' Sul e os meridianos 49° 23' – 49° 21' Oeste (Sauniti *et al.*, 2004). Abastece atualmente em torno de 25% da população da RMC, com a produção de aproximadamente 2 mil litros de água por segundo (SANEPAR, 2013).

A área superficial do reservatório é de cerca de 9,0 km², com um volume útil de 48,0 hm³ e volume total de 59,0 hm³. A profundidade média é de 6,5 m, alcançando 15,0 m em determinados locais. A cota do vertedouro é de 887,2 m e o tempo de residência estimado é de 292 dias (Carneiro *et al.*, 2016). O reservatório é classificado como monomítico quente, apresentando uma circulação completa por ano nos meses mais frios (IAP, 2009).

Modelagem

O modelo GLM 3.0 (Hipsey *et al.*, 2019; <http://aed.see.uwa.edu.au/research/models/GLM/>) foi empregado na simulação do reservatório do Passaúna de março de 2018 à fevereiro de 2019. O período de março à agosto de 2018 foi escolhido para comparação com medições realizadas por termistores

instalados próximos à captação da Sanepar (Companhia de Saneamento do Paraná), pela Universidade de Koblenz-Landau. Os termistores utilizados foram fixados a uma corda com peso no fundo e uma boia submersa na superfície, nas profundidades de 1 m à 11 m em relação à superfície da água. Os Minilog-II-T produzidos pela Vemco possuem precisão de $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$ e resolução de 0.01°C , com registro de temperatura a cada 1 minuto.

Os parâmetros de calibração do modelo estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros de calibração do modelo GLM

Parâmetro	Valor	Referência
<i>Mixing efficiency - convective overturn</i>	0,2	Wu (1973)
<i>Mixing efficiency - wind stirring</i>	0,23	Yeates e Imberger (2003)
<i>Mixing efficiency - shear production</i>	0,3	Spigel <i>et al.</i> (1986)
<i>Mixing efficiency - unsteady turbulence (acceleration)</i>	0,51	Sherman <i>et al.</i> (1978)
<i>Mixing efficiency - Kelvin-Helmholtz turbulent billows</i>	0,3	Sherman <i>et al.</i> (1978)
<i>Mixing efficiency of hypolimnetic turbulence</i>	0,5	Weinstock (1981)
<i>Bulk aerodynamic coefficient for sensible heat transfer</i>	0,0013	Bueche <i>et al.</i> (2017)
<i>Bulk aerodynamic coefficient for latent heat transfer</i>	0,0013	Bruce <i>et al.</i> (2018)
<i>Bulk aerodynamic momentum transfer coefficient</i>	0,0013	Fischer <i>et al.</i> (1979)
<i>Light extinction coefficient (m^{-1})</i>	0,5	Hipsey <i>et al.</i> (2019)
<i>Scaling factor to adjust the windspeed data</i>	1,15	Fenocchi <i>et al.</i> (2017)
<i>Minimum thickness of a layer (m)</i>	0,1	Fenocchi <i>et al.</i> (2017)
<i>Maximum thickness of a layer (m)</i>	0,5	Fenocchi <i>et al.</i> (2017)
<i>Time step for integration (seconds)</i>	3600	

O conjunto de dados meteorológicos utilizados para o desenvolvimento do trabalho estão mostrados na Figura 1. Os dados de radiação de onda curta, temperatura do ar, umidade relativa e velocidade do vento foram obtidos da estação meteorológica CTB-60 do Instituto de Tecnologia do Paraná - Tecpar (INPE, 2019). Já os registros de precipitação foram disponibilizados pela estação meteorológica de Curitiba (código 25264916), mantida pelo Instituto Tecnológico SIMEPAR e localizada a cerca de 12 km do centro do reservatório. Como não havia dados disponíveis de radiação de onda longa, foi realizado o cálculo pelo modelo a partir da fração de cobertura de nuvens, aproximada teoricamente pelo modelo de insolação *Bird Clear Sky Model* (Bird, 1984), e a temperatura do ar.

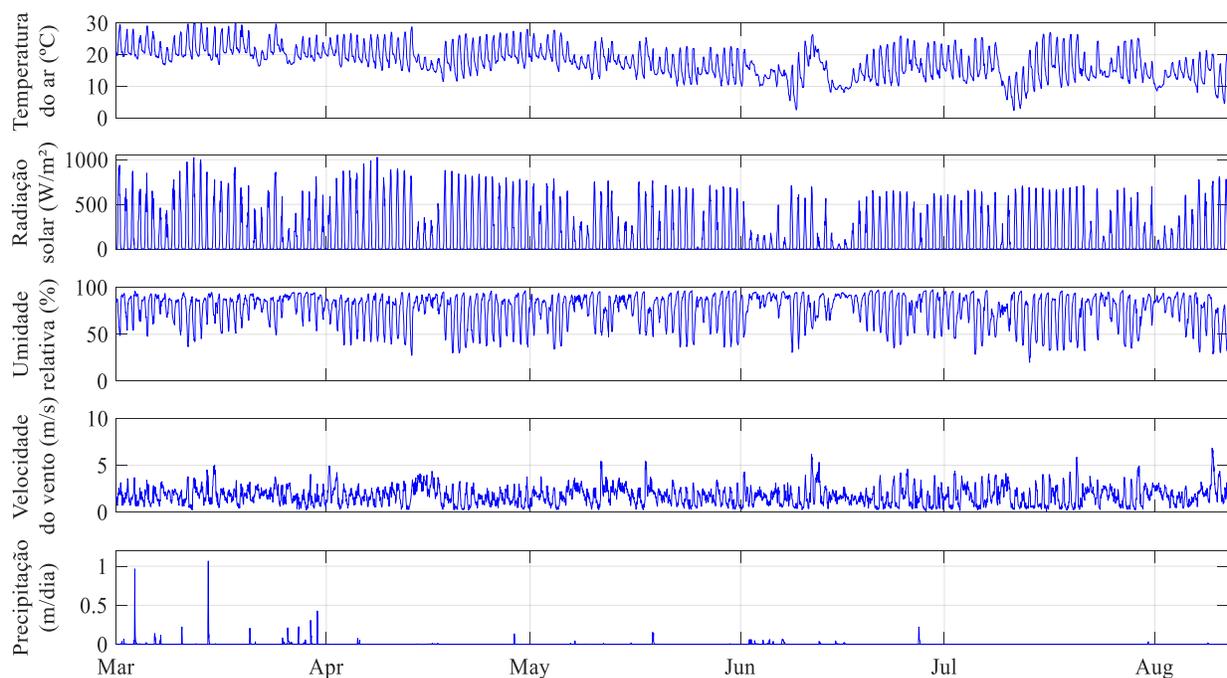


Figura 1 – Dados meteorológicos das estações Tecpar (CTB-60) e Simepar (código 25264916), próximas ao reservatório do Passaúna em 2018

Os dados de vazão e temperatura da água a montante do reservatório foram obtidos da estação hidrológica BR-277 Campo Largo (código 65021800), localizada a cerca de 2,4 km da entrada do reservatório. A Figura 2 apresenta os registros adquiridos, juntamente com as vazões de saída (captação, descarregador de fundo e vertedouro), disponibilizadas pela Sanepar. Verifica-se um valor médio de aporte de água de 2,1 m³/s e vazão de saída total igual a 5,3 m³/s.

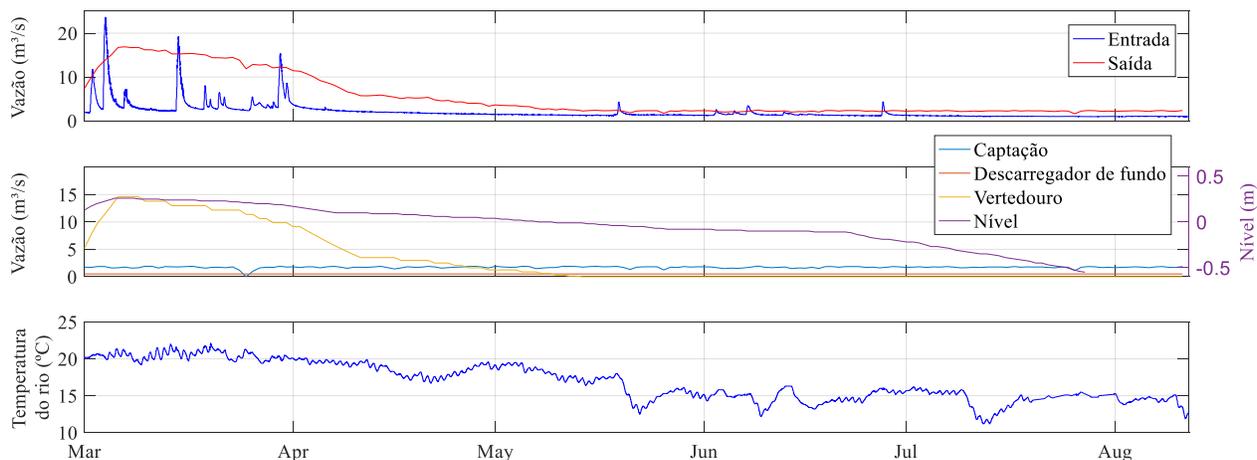


Figura 2 – Dados de vazão e temperatura do rio Passaúna e de vazão de saída no reservatório do Passaúna em 2018

RESULTADOS

Os resultados do GLM para a simulação do perfil térmico do reservatório do Passaúna estão mostrados na Figura 3. Verifica-se que no período mais quente, entre março à meados de maio, o reservatório apresenta-se estratificado e nos demais meses começa a se misturar, devido ao resfriamento das camadas mais próximas à superfície. Há uma queda na temperatura, durante o período simulado, de cerca de $8,0^{\circ}\text{C}$ na superfície e $5,0^{\circ}\text{C}$ no fundo do reservatório.

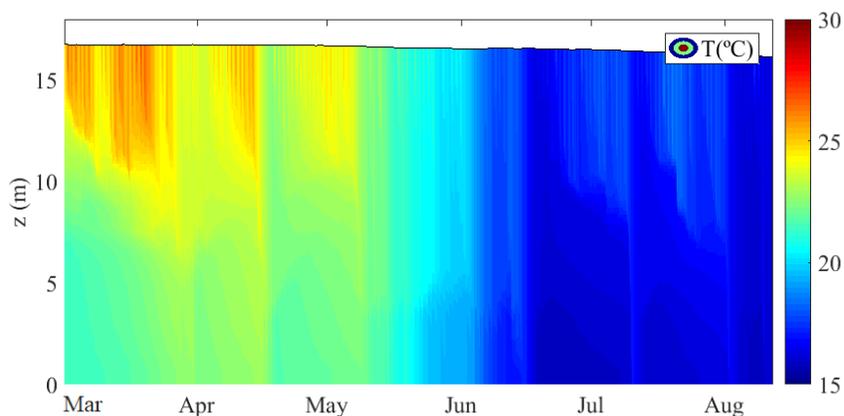


Figura 3 – Temperatura da coluna d'água do reservatório do Passaúna, obtida pelo GLM em 2018

A Figura 4 apresenta a comparação dos valores de temperatura medidos e os obtidos pelo modelo, juntamente com o erro médio absoluto (EMA), para seis profundidades (1, 3, 5, 7, 9 e 11 m da superfície).

O EMA ficou próximo à valores encontrados em outros estudos, com $0,55^{\circ}\text{C}$ para a camada mais superficial e $0,51^{\circ}\text{C}$ à 11m. Fenocchi *et al.* (2017) também utilizaram o GLM modelando um lago subalpino profundo com configurações diferentes de nível e fluxos de entrada e saída, o erro apresentado foi na faixa de $0,50^{\circ}\text{C}$ a $1,57^{\circ}\text{C}$. Antonopoulos e Gianniou (2003) encontraram valores de erro médio absoluto na ordem de $0,36^{\circ}\text{C}$ a $1,44^{\circ}\text{C}$, simulando um lago da Grécia com um modelo de transporte de calor 1D. Para Perroud *et al.* (2009), os valores dos erros variaram de $0,12^{\circ}\text{C} \pm 1,02^{\circ}\text{C}$ a $0,5^{\circ}\text{C} \pm 1,2^{\circ}\text{C}$ na camada superficial para os modelos SIMSTRAT e DYRESM em um lago europeu.

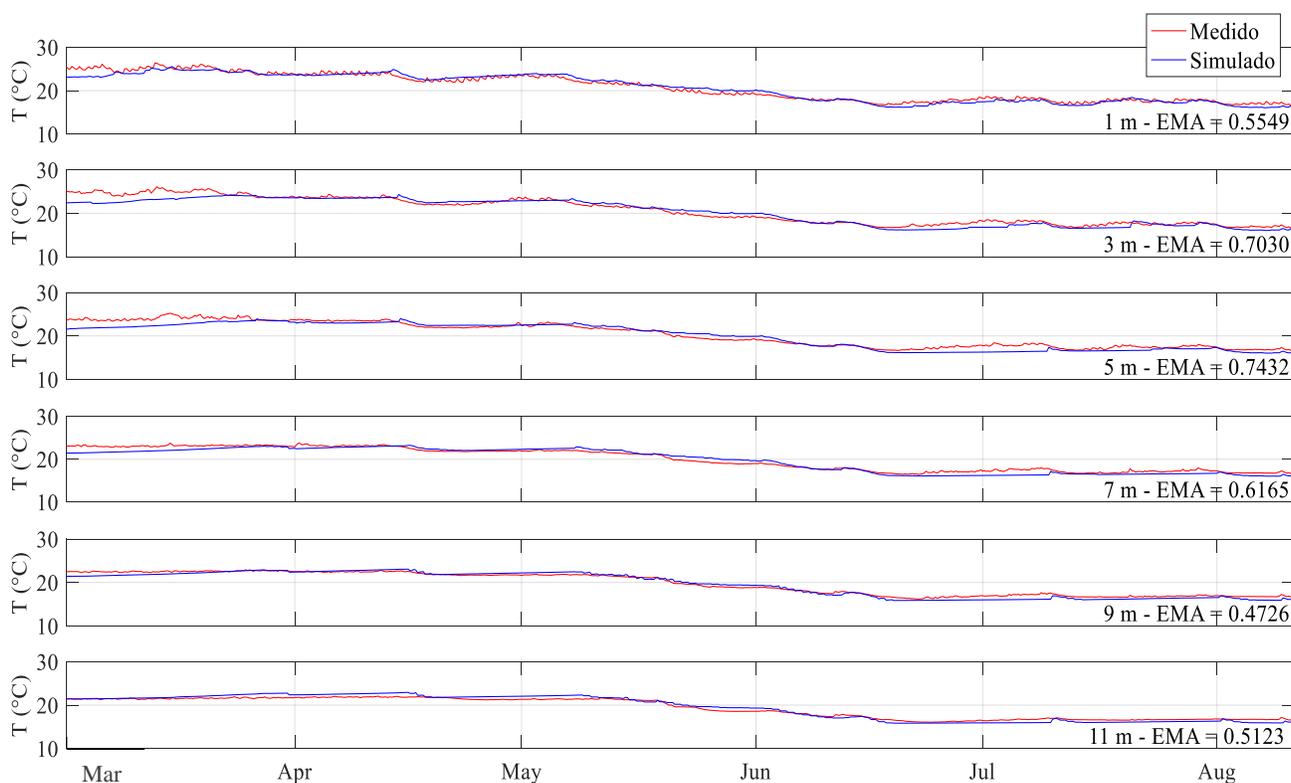


Figura 4 – Comparação entre os valores de temperatura medidos e os simulados pelo GLM no reservatório do Passaúna em 2018, com o cálculo do EMA, nas profundidades de 1, 3, 5, 7, 9 e 11 m da superfície

A fim de verificar a estabilidade da estratificação do reservatório e a sua intensidade, foram calculados a Estabilidade de Schmidt e o Número do Lago, com os resultados medidos e os simulados, usando o *Lake Analyzer*, um software de código aberto que calcula índices de mistura e estratificação de lagos e reservatórios (Read *et al.*, 2011). A Figura 5 apresenta os resultados, coerentes aos encontrados na literatura (Borics *et al.*, 2015; Imberger e Patterson, 1989), já que os maiores valores para a

estabilidade de Schmidt ocorreram nos meses mais quentes, indicando maior resistência à mistura do corpo d'água. Tal comportamento corresponde também aos resultados para o Número do Lago, o qual apresentou valores acima de 1 também nesse período, o que ratifica a estratificação ser mais forte e ocorrer mistura devido à ação do vento apenas nas porções superiores do epilímnio.

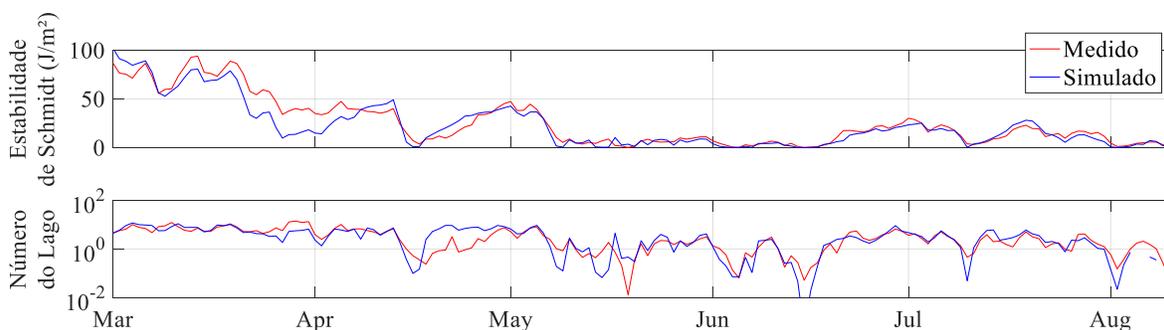


Figura 5 – Índices físicos do reservatório do Passaúna em 2018, com dados medidos e os simulados pelo GLM

Durante o período estudado, o Número do Lago é maior que 1 em 120 dias para os dados medidos e em 124 dias na simulação do modelo. Tais valores são próximos ao número de dias em que ocorreu uma diferença de temperatura entre a superfície e o fundo (Figura 6), nos resultados do GLM, acima de 1°C (103 dias). Um gradiente térmico superior a 2°C foi verificado em 43 dias e maior que 3°C em 18 dias, o que está de acordo com a Figura 3, onde observa-se que em um pequeno período da simulação a coluna d'água está fortemente estratificada. De 164 dias simulados, apenas 61 apresentaram um gradiente térmico menor que 1°C entre superfície e fundo. Na Figura 6 também está mostrada a profundidade da termoclina com os dados simulados pelo GLM, onde observa-se que quando a termoclina atinge a profundidade máxima, em torno de 16 m, corresponde ao período de mistura completa da coluna d'água.

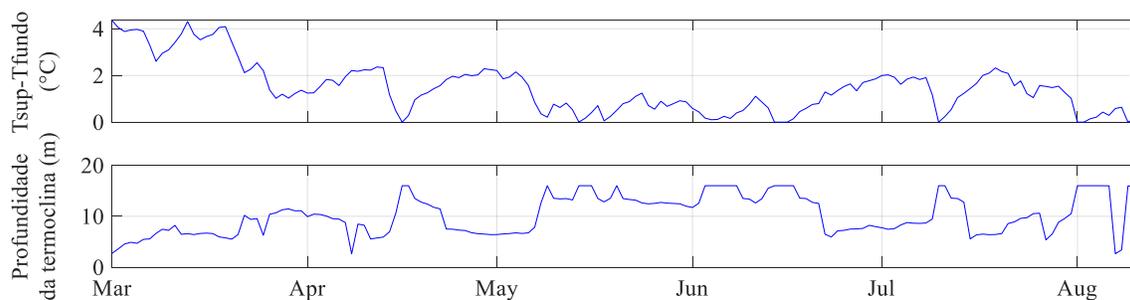


Figura 6 – Diferença de temperatura da superfície e do fundo e profundidade da termoclina do reservatório do Passaúna, com dados simulados pelo GLM em 2018

CONCLUSÕES

A aplicação do modelo GLM no reservatório do Passaúna, reservatório de abastecimento público de Curitiba (PR), mostrou que o modelo é capaz de reproduzir fenômenos de estratificação térmica com diferenças de temperatura menores que aproximadamente 1°C quando comparadas com medições. O cálculo dos índices físicos permitiu definir os períodos de mistura e estratificação do corpo hídrico, os quais concerniram com o modelo. Incertezas prevalecem na descrição de variações horárias registradas pelos sensores. Dessa forma, os próximos passos desse estudo serão analisar os efeitos em escalas temporais menores e as consequências para a estratificação química incluindo parâmetros de qualidade na modelagem, a qual é feita acoplado a biblioteca *Aquatic EcoDynamics* (AED, 2019) ao GLM.

AGRADECIMENTOS

Nós agradecemos à CAPES pela bolsa de mestrado da Gabriela G. N. Sales (Código de Financiamento 001), à Sanepar pelo acesso aos dados e ao reservatório, ao CNPq pela bolsa de produtividade do Prof. Dr. Tobias Bleninger e ao projeto MuDak pelo financiamento do projeto e a bolsa de doutorado da Mayra Ishikawa.

REFERÊNCIAS

- AED, Aquatic EcoDynamics. (2019). Disponível em: < <http://aed.see.uwa.edu.au/research/models/AED/index.html> >. Acesso em: 22 abril.
- ANTONOPOULOS, V. Z.; GIANNIOU, S. K. (2003) “Simulation of water temperature and dissolved oxygen distribution in Lake Vegoritis, Greece”. *Ecological Modelling*, v. 160, n. 1-2, pp. 39-53.
- BIRD, R. E. (1984). “A simple, solar spectral model for direct-normal and diffuse horizontal irradiance”. *Sol. Energy*, 32, pp. 461–471.
- BORICS, G.; ABONYU, A.; VÁRBIRÓ, G.; PADISÁK, J. & T-KRASZNAI, E. (2015). “Lake stratification in the Carpathian basin and its interesting biological consequences”. *Inland Water*, pp. 173-186.
- BRUCE; L. C.; FRASSL; M. A.; ARHONDITSIS; G. B.; GAL; G.; HAMILTON; D. P.; HANSON; P. C.; HETHERINGTON; A. L.; MELACK; J. M.; READ; J. S.; RINKE; K. RIGOSI; A.; TROLLE; D.; WINSLOW; L.; ADRIAN; R.; AYALA; A. I.; BOCANIOV; S. A.; BOEHRER; B.; BOON; C.; BROOKES; J. D.; BUECHE; T.; BUSCH; B. D.; COPETTI; D.; CORTÉS; A.; DE EYTO; E.; ELLIOTT; J.A.; GALLINA; N.; GILBOA; Y.; GUYENNON; N.; HUANG; L.; KERIMOGLU; O.; LENTERS; J.D.; MACINTYRE; S.; MAKLER-PICK; V.; MCBRIDE; C. G.; MOREIRA; S.; ÖZKUNDAKCI; D.; PILOTTI; M.; RUEDA; F. J.; RUSAK; J. A.; SAMAL; N. R.; SCHMID; M.; SHATWELL; T.; SNORTHHEIM; C.; SOULIGNAC; F.; VALERIO; G.; VAN DER LINDEN; L.; VETTER; M.; VINÇON-LEITE; B.; WANG; J.; WEBER; M.; WICKRAMARATNE; C.; WOOLWAY; R. I.; YAO; H.; HIPSEY; M. R. (2018). “A multi-lake comparative analysis of the General Lake Model (GLM): Stress-testing across a global observatory network”. *Environ. Modell. Softw.*, 102, pp. 274-291.
- BUECHE, T.; HAMILTON, D. P.; VETTER, M. (2017). “Using the General Lake Model to simulate water temperatures and ice cover of a medium-sized lake: a case study of Lake Ammersee, Germany”. *Environ. Earth Sci.*, pp. 76-461.
- CARNEIRO, C.; KELDERMAN, P.; IRVINE, K. (2016). “Assessment of phosphorus sediment–water exchange through water and mass budget in Passaúna Reservoir (Paraná State, Brazil)”. *Environ Earth Sci*, pp. 75-564.

- CUNHA, C. de L. da N.; CARNEIRO, C.; GOBBI, E. F.; ANDREOLI, C. V. (2011). “Eutrofização em Reservatórios: Gestão Preventiva”. Estudo Interdisciplinar na Bacia do Rio Verde. UFPR Curitiba-PR, 515 p.
- ESTEVES, F. A. (2011). “Fundamentos de limnologia”. Editora Interciência, Rio de Janeiro-RJ. 826 p.
- FENOCCHI, A.; ROGORA, M.; SIBILLA, S.; DRESTI, C. (2017). “Relevance of inflows on the thermodynamic structure and on the modeling of a deep subalpine lake (Lake Maggiore, Northern Italy/Southern Switzerland)”. *Limnologia*, 63, pp. 42–56.
- GLEON, *Global Lake Ecological Observatory Network*. (2019). Disponível em: <<http://gleon.org/>>. Acesso em: 22 abril.
- GOUDSMIT, G. H.; BURCHARD, H.; PEETERS, F.; WÜEST, A. (2002). “Application of $k - \epsilon$ turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches”. *Journal of Geophysical Research*.
- HENDERSON-SELLERS, B. (1984). “Development and Application of U.S.E.D: A Hydroclimate Lake Stratification Model”. *Ecological Modelling* v.21, pp. 233-246.
- HIPSEY; M.R.; BRUCE; L.C.; BOON; C.; BUSCH; B.; CAREY; C.C.; HAMILTON; D.P.; HANSON; P.C.; MOO; J.; READ; J.S.; DE SOUSA; E.; WEBER; M.; WINSLOW; L.A. (2019). “A General Lake Model (GLM 3.0) for linking with high-frequency sensor data from the Global Lake Ecological Observatory Network (GLEON)”. *Geosci. Model Dev.*, 12, pp. 473-523.
- IAP, Instituto Ambiental do Paraná. (2009). “Qualidade das águas: reservatórios do estado do Paraná 2005 a 2008”. 124 p.
- IMBERGER, J.; PATTERSON, J. C. (1981). “A dynamic reservoir simulation model-DYRESM: 5” in Fischer, H. B., Transport Models for Inland and Coastal Waters. Academic Press, New York.
- IMBERGER, J.; PATTERSON, J. (1989). “Physical Limnology”. *Advanced in Applied Mechanics*, pp. 303-475.
- IMERITO, A. (2007). “Dynamic Reservoir Simulation Model DYRESM”. Science Manual. Centre for Water Research, University of Western Australia.
- INPE, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. (2019). Disponível em: <<http://sonda.ccst.inpe.br/basedados/curitiba.html>>. Acesso em: 08 abril.
- MIRINOV, D.; KIRILLIN, G.; HEISE, E.; GOLOSOV, S.; TERZHEVIK, A.; ZVEREV, I. (2003). “Parameterization of Lakes in Numerical Models for Environmental Applications”. Proc. of the 7th Workshop on Physical Processes in Natural Waters, A. Yu. Terzhevik, Ed., Northern Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Karelia, Russia. pp. 135-143.
- PEETERS, F.; LIVINGSTONE, D. M.; GOUDSMIT, G. H.; KIPFER, R.; FORSTER, R. (2002). “Modeling 50 years of historical temperature profiles in a large central European lake”. *Limnology and Oceanography*. v.47 (1), pp. 186-197.
- PERROUD, M.; GOYETTE, S.; MARTYNOV, A.; BENISTON, M.; ANNEVILLEC, O. (2009). “Simulation of multiannual thermal profiles in deep Lake Geneva: A comparison of one-dimensional lake models”. *Limnology and Oceanography* v.54 (5), pp. 1574-1594.
- READ, J. S.; HAMILTON, D. P.; JONES, I. D.; MURAOKA, K.; WINSLOW, L. A.; KROISS, R.; WU, C. H.; GAISER, E. (2011). “Derivation of lake mixing and stratification indices from high-resolution lake buoy data”. *Environmental Modelling & Software*, 26, pp. 1325–1336.
- SANEPAR, Companhia de Saneamento do Paraná. (2013). “Plano Diretor SAIC: Sistema de Abastecimento de Água Integrado de Curitiba e Região Metropolitana”. Curitiba-PR. 145 p.
- SAUNITI, R. M.; FERNANDES, L. A.; BITTENCOURT, A. V. L. (2004). “Estudo do assoreamento do reservatório da barragem do rio Passaúna-Curitiba-PR”. *Boletim Paranaense de Geociências*, pp. 25-35.
- SHERMAN, F. S.; IMBERGER, J.; CORCOS, G. M. (1978). “Turbulence and mixing in stably stratified waters”. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 10, pp. 267-288.
- SPIGEL, R. H.; IMBERGER, J.; RAYNER, K. N. (1986). “Modeling the diurnal mixed layer”. *Limnol. Oceanogr.*, 31, pp. 533-556.
- YAO, H., SAMAL, N. R.; JOEHNK, K. D.; FANG, X.; BRUCE, L. C.; PIERSON, D. C.; RUSAK, J. A.; JAMES, A. (2014). “Comparing ice and temperature simulations by four dynamic lake models in Harp Lake: past performance and future predictions”. *Hydrological Processes*, 28, pp. 4587–4601.
- YEATES, P. S.; IMBERGER, J. (2003). “Pseudo two-dimensional simulations of internal and boundary fluxes in stratified lakes and reservoirs”. *International Journal of River Basin Research*, 1, pp. 1-23.
- WEINSTOCK, J. (1981). “Vertical turbulence diffusivity for weak or strong stable stratification”. *J. Geophys. Res.*, 86, pp. 9925-9928.
- WU, J. (1973). “Wind induced entrainment across a stable density interface”. *J. Fluid Mech.*, 61, pp. 275-278.